Студентська математична олімпіада Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

В. Б. Брайман, О. Г. Кукуш, А. В. Примак, М. С. Пупашенко.

Чергове математичне змагання студентів Київського університету було проведено 28 лютого 2005 року. Традиційно до участі були запрошені представники інших вузів, а також найкращі учні старших класів ліцеїв Києва. Як завжди, окремо змагалися студенти I–II та III–IV курсів. Про постійне зростання популярності олімпіади свідчить кількість учасників – понад 70 студентів з I–II курсів та понад 30 – з III–IV курсів. Далі ми наводимо прізвища переможців, умови та розв'язки запропонованих задач, а також матеріали двох попередніх олімпіад.

Переможці олімпіади серед студентів I–II курсів.

I місце

Петровський Дмитро (мех-мат ф-т КНУ, 1 курс)

II місце

Матвійчук Микола (мех-мат ф-т КНУ, 2 курс)
Туманян Арам (мех-мат ф-т КНУ, 1 курс)
Кравець Олександр (ліцей № 171 "Лідер", 11 клас)
Слободянюк Сергій (УФМЛ КНУ, 11 клас)
Журба Ярослав (мех-мат ф-т КНУ, 1 курс)
Апостол Роман (УФМЛ КНУ, 11 клас)

III місце

Добровольська Галина (мех-мат ф-т КНУ, 1 курс)
Ібрагімов Антон (мех-мат ф-т КНУ, 1 курс)
Кацев Максим (ф-т кібернетики КНУ, 2 курс)
Наумов Михайло (мех-мат ф-т КНУ, 2 курс)
Пупашенко Дар'я (мех-мат ф-т КНУ, 1 курс)
Пупашенко Михайло (мех-мат ф-т КНУ, 1 курс)
Тимошкевич Тарас (мех-мат ф-т КНУ, 1 курс)
Федоров Сергій (мех-мат ф-т КНУ, 1 курс)
Чернега Павло (ФТІ при НТУУ "КПІ", 1 курс)
Юрченко Іван (ліцей "Наукова Зміна", 10 клас)

Переможці олімпіади серед студентів III-IV курсів.

I місце

Вязовська Марина (мех-мат ф-т КНУ, 4 курс)

II місце

Дорошенко Вадим (мех-мат ф-т КНУ, 4 курс)
Рибак Олександр (ФТІ при НТУУ "КПІ", 3 курс)

III місце

Веденський Кирило (ФТІ при НТУУ "КПІ", 3 курс)
Волошин Денис (мех-мат ф-т КНУ, 4 курс)
Рибак Микола (мех-мат ф-т КНУ, 3 курс)

Завдання для 1–2 курсів.

1. Чи вірно, що послідовність $\{x_n,\, n \geqslant 1\}$ дійсних чисел збіжна тоді і тільки тоді, коли

$$\lim_{n\to\infty} \varlimsup_{m\to\infty} |x_n - x_m| = 0?$$

2. Нехай A, B, C — дійсні матриці. Довести нерівність

$$\mathrm{tr}(A(A^T - B^T) + B(B^T - C^T) + C(C^T - A^T)) \geqslant 0.$$

3. Більярдний стіл отримано з шахової дошки вирізанням деяких клітинок. З одного з кутів випускають більярдну кулю під кутом α до сторони більярда, де $\mathrm{tg}\,\alpha \in \mathbb{Q}$. При зіткненні зі стороною більярда куля відбивається так, що кут падіння дорівнює куту відбиття, а якщо куля попадає в кут, то вона провалюється в лунку. Довести, що куля обов'язково попаде в лунку.

4. Розв'язати рівняння $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{1 + \sqrt{x + \sqrt{x^2 + \cdots + \sqrt{x^n}}}} = 2.$

5. Чи існують матриці A, B, C, які не мають спільних власних векторів та задовольняють умову $AB = BC = CA$?

6. Довести, що

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x \cos 3x \cos 4x \ldots \cos 2005x \, dx > 0.$$

7. Нехай $f \in C^{(1)}(\mathbb{R})$ та $a_1 < a_2 < a_3 < b_1 < b_2 < b_3$. Чи обов'язково знайдуться такі числа $c_1 \leqslant c_2 \leqslant c_3$, що $c_i \in [a_i, b_i]$ та $f'(c_i) = \dfrac{f(b_i) - f(a_i)}{b_i - a_i}$, $i = 1, 2, 3$?

8. Назвемо $\mathbb{Z}$-кулею множину точок простору вигляду

$$S = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2,\ x, y, z, \in \mathbb{Z}\},\ R \in \mathbb{R}.$$

Довести, що не існує $\mathbb{Z}$-кулі, яка складається рівно з 2005 різних точок.
9. Назвемо трикутник $\triangle A_1A_2A_3$ на декартовій площині, сторони та продовження сторін якого не проходять через початок координат O, додатним, якщо принаймні при двох $i = 1, 2, 3$ при русі точки A по стороні A_iA_{i+1} вектор $\overrightarrow{OA}$ обертається проти годинникової стрілки (тут $A_4 = A_1$), та від'ємним у протилежному випадку. Нехай точки A_i мають координати (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$. Довести, що не існує многочлена $P(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$, який був би додатним при додатних $\triangle A_1A_2A_3$, та від'ємним — при від'ємних.

Завдання для 3–4 курсів.

10. Нехай K — компактна множина у просторі $C([0,1])$ з рівномірною метрикою. Довести неперервність функції $f(t) = \min\{x(t) + x(1-t) : x \in K\}$, $t \in [0,1]$.
11. Для яких $\lambda \in \mathbb{C}$ будь-яка послідовність $\{a_n,\, n \geqslant 1\} \subset \mathbb{C}$, що задовольняє умову

$$\forall n \geqslant 1 \quad |\lambda a_{n+1} - \lambda^2 a_n| < 1,$$

є обмеженою?
12. Нехай X та Y — лінійні нормовані простори. Оператор $K : X \to Y$ назвемо суперкомпактним, якщо для довільної обмеженої множини $M \subset X$ множина

$$K(M) = \{y \in Y | \exists x \in M : y = K(x)\}$$

є компактною в Y. Довести, що серед лінійних неперервних операторів з X в Y суперкомпактним є лише нульовий.
13. Нехай A — дійсна ортогональна матриця, $A^2 = E$. Довести, що A можна подати у вигляді $A = UBU^T$, де U — ортогональна матриця, а B — діагональна матриця з числами 1 та -1 на діагоналі.
14. Нехай B — обмежена підмножина зв'язного метричного простору X. Чи обов'язково в X знайдеться зв'язна та обмежена підмножина A така, що $B \subset A$?
15. Нехай $t > 0$, μ — така міра на борелевій σ-алгебрі на $\mathbb{R}^+$, що при кожному $\alpha < 1$ $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} \exp(\alpha x^t)\, d\mu(x) < \infty$. Довести, що при кожному $\alpha < 1$ $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} \exp(\alpha(x+1)^t)\, d\mu(x) < \infty$.

16. Див. задачу **8** для 1-2 курсів.
17. Див. задачу **9** для 1-2 курсів.

18. Нехай $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ та $y_0 < y_1 < \cdots < y_n$. Довести, що існує строго зростаючий на $[x_0, x_n]$ многочлен p такий, що $p(x_j) = y_j$, $j = 0, \ldots, n$.

Задачі запропонували: А. В. Бондаренко (8,16), В. Б. Брайман (5,7), М. С. Вязовська (2), В. С. Грінберг(США) (9,17), Г. В. Крюкова (3), О. Г. Кукуш (4,10,13,15), О. Н. Нестеренко(1), А. В. Примак (11,18), М. С. Пупашенко (6,14), І. Сінько (12).

Розв'язки та вказівки.
1–2 курси.

1. *Необхідність.* Нехай $x_n \to a$, $n \to \infty$. Тоді має місце $\lim\limits_{m\to\infty} |x_n - x_m| = |x_n - a|$ та $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{\lim\limits_{m\to\infty}} |x_n - x_m| = \lim\limits_{n\to\infty} |x_n - a| = 0$.
Достатність. Покажемо, що послідовність $\{x_n : n \geqslant 1\}$ є фундаментальною. Для довільного $\varepsilon > 0$ виберемо $N \in \mathbb{N}$ так, що $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} |x_m - x_N| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, а отже $\exists M \in \mathbb{N} : \forall m \geqslant M$ $|x_m - x_N| < \frac{\varepsilon}{2}$. Звідси $\forall m_1, m_2 \geqslant M$ виконується нерівність $|x_{m_1} - x_{m_2}| \leqslant |x_{m_1} - x_N| + |x_{m_2} - x_N| < \varepsilon$. Фундаментальність встановлено та за критерієм Коші має місце збіжність.
2. Нехай $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $1 \leqslant j \leqslant l$. Тоді

$$\mathrm{tr}(A(A^T - B^T) + B(B^T - C^T) + C(C^T - A^T)) = \sum_{i,j} (a_{ij}^2 - a_{ij}b_{ij} + b_{ij}^2 - b_{ij}c_{ij} + c_{ij}^2 - c_{ij}a_{ij}).$$

Залишається помітити, що для довільних $a, b, c \in \mathbb{R}$
$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = \dfrac{1}{2}((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2) \geqslant 0$.
3. Нехай $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{p}{q}$. Розіб'ємо кожну клітинку дошки на прямокутники розміру $\frac{1}{p} \times \frac{1}{q}$. Тоді куля буде рухатись лише по діагоналях цих прямокутників. Якби куля ніколи не потрапила в лунку, то вона б рано чи пізно пройшла по діагоналі деякого прямокутника принаймні двічі в одному напрямку, бо діагоналей та напрямків скінченна кількість. Але тоді рух кульки був би періодичним та відстежуючи рух кульки отримуємо, що через період після початку руху куля мала повернутись у кут, з якого її випустили, та потрапити в лунку.
4. Неважко перевірити, що функція

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + \sqrt{x + \sqrt{x^2 + \cdots + \sqrt{x^n}}}}$$

визначена при $x \geqslant 0$ (бо допранична послідовність є неспадною та обмеженою). При $x < y$ маємо

$$f(x) \leqslant \sqrt{1 + \sqrt{x + \lim_{n\to\infty} \sqrt{y^2 + \cdots + \sqrt{y^n}}}} < f(y),$$

тобто f строго зростає та рівняння $f(x) = 2$ має щонайбільше один розв'язок. Доведемо, що $f(4) = 2$. Справді, при $a, b \geqslant 0$ та $c \geqslant 1$ маємо

$$|\sqrt{c+a} - \sqrt{c+b}| = \frac{|a-b|}{\sqrt{c+a} + \sqrt{c+b}} \leqslant \frac{1}{2}|a-b|.$$

Звідси при

$$A_n = \sqrt{1 + \sqrt{4 + \cdots + \sqrt{4^{n-1} + \sqrt{4^n}}}},$$

$$B_n = \sqrt{1 + \sqrt{4 + \cdots + \sqrt{4^{n-1} + \sqrt{4^n} + 1}}}$$

виконується нерівність $|A_n - B_n| \leqslant \frac{1}{2^n}$, з якої маємо $\lim\limits_{n\to\infty}(A_n - B_n) = 0$. Але

$$\sqrt{4^{n-1} + \sqrt{4^n} + 1} = 2^{n-1} + 1 = \sqrt{4^{n-1}} + 1,$$

звідки $B_n = B_{n-1} = \cdots = B_1 = \sqrt{1 + \sqrt{4} + 1} = 2$, $f(4) = \lim\limits_{n\to\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} B_n = 2$.

Відповідь: $x = 4$.

5. Нехай на площині задано рівносторонній трикутник з центром в початку координат, а A, B, C — матриці 2×2, що відповідають симетріям площини відносно висот цього трикутника. Тоді матриці A, B, C очевидно не мають спільних власних векторів та $AB = BC = CA$ — матриця, що відповідає повороту відносно початку координат на 120°.

6. Перетворимо добуток косинусів в суму, багаторазово використовуючи формулу $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$. Підінтегральний вираз дорівнює

$$\frac{1}{2^{2004}} \sum \cos(2x \pm 3x \pm 4x \pm \cdots \pm 2005x),$$

де сумування поширюється на всі 2^{2004} можливих розстановок знаків. Інтеграл $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\, dx$ дорівнює нулю при $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ та дорівнює 2π при $k = 0$. Тому інтеграл невід'ємний та лишається зауважити, що існує доданок з $k = 2 \pm 3 \pm 4 \pm \cdots \pm 2005 = 0$. Це так, бо $(2-3-4+5) + (6-7-8+9) + \cdots + (2002-2003-2004+2005) = 0$.

7. Нехай $f(x) = x^3 - 3x$, $a_1 = -2$, $a_3 = -1$, $b_1 = 1$ та $b_3 = 2$. Тоді $f(a_1) = f(b_1)$, $f(a_3) = f(b_3)$ та $f'(c_1) = f'(c_3) = 0$. Візьмемо $a_1 < a_2 < a_3$ та $b_1 < b_2 < b_3$ так, що $f(b_2) > f(a_2)$, а отже має бути $f'(c_2) > 0$. Але $f'(x) = 3(x^2 - 1)$ та з умов $f'(c_1) = f'(c_3) = 0$, $c_1 \leqslant c_2 \leqslant c_3$ випливає, що $f'(c_2) \leqslant 0$. Отже, шуканих c_i, $1 \leqslant i \leqslant 3$, не існує.

8. Разом з точкою (x, y, z) розглянемо точки $(\pm x, \pm y, \pm z)$. Якщо серед чисел x, y, z принаймні два ненульові, то вказані чотири або вісім точок одночасно належать $\mathbb{Z}$-кулі. Тому кількість точок, що не лежать на осях координат, ділиться на 4. При $k \leqslant R < k+1$ на осях координат лежать $6k + 1$ точок та при деякому m маємо $6k + 1 + 4m = 2005$, а отже k має бути парним. З іншого боку, неважко довести, що $7 \leqslant R < 8$ та $k = 7$, суперечність.

9. Нехай точки A_1, A_2, A_3 мають координати $(1, 0)$, $(0, 1)$ та (x, y), а $Q(x, y) = P(1, 0, 0, 1, x, y)$. Трикутник $\triangle A_1A_2A_3$ є від'ємним в першій координатній чверті та додатним в інших координатних чвертях. Тому при всіх $y > 0$ многочлен $Q(x, y)$ має змінювати знак при переході через точку $(0, y)$. Тоді $Q(0, y) = 0$, $y > 0$ та $Q(x, y) = Q_1(x, y) \cdot x$. Аналогічно $Q_1(x, y) = Q_2(x, y) \cdot y$, $Q(x, y) = xy \cdot Q_2(x, y)$. Тепер $Q_2(x, y)$ змінює знак при переході через точки $(0, y)$, $y < 0$ або $(x, 0)$, $x < 0$, $Q_2(x, y) = xy \cdot R(x, y)$, $Q(x, y) = (xy)^2 R(x, y)$. Многочлен $R(x, y)$ при $xy \neq 0$ має такий саме знак як $Q(x, y)$, тому, повторюючи для нього попередні міркування, отримуємо, що $R(x, y) = (xy)^2 S(x, y)$ і так далі, де степені многочленів Q, R, S, $\ldots$ необмежено зменшуються, суперечність.

3–4 курси.

10. Покажемо, що f рівномірно неперервна. За теоремою Асколі-Арцела множина K одностайно неперервна, тобто
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in K\ \forall t_1, t_2 \in [0, 1]\ |t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |x(t_1) - x(t_1)| < \varepsilon$.

Нехай $t_1, t_2 \in [0, 1]$, $|t_1 - t_2| < \delta$, x_1, x_2 — функції, на яких досягаються значення $f(t_1)$, $f(t_2)$ (такі функції існують, бо при кожному $t \in [0, 1]$ функція $g_t(x) = x(t) + x(1 - t)$ є неперервною на компакті K). Тоді

$$\begin{aligned} f(t_1) - f(t_2) = x_1(t_1) + x_1(1 - t_1) - x_2(t_2) - x_2(1 - t_2) \leqslant \\ \leqslant (x_1(t_1) + x_1(1 - t_1)) - (x_2(t_1) - x_2(1 - t_1)) + \\ + |x_2(t_1) - x_2(t_2)| + |x_2(1 - t_1) - x_2(1 - t_2)| < 2\varepsilon \end{aligned}$$

(тут використано, що $g_{t_1}(x_1) \leqslant g_{t_1}(x_2)$). Аналогічно $f(t_2) - f(t_1) < 2\varepsilon$, а отже $|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |f(t_1) - f(t_2)| < 2\varepsilon$ та рівномірну неперервність доведено.

11. При $\lambda = 0$ послідовність $\{a_n\}$ може бути довільною. При $0 < |\lambda| < 1$ маємо $|a_{n+1}| < |\lambda||a_n| + \dfrac{1}{|\lambda|}$, $n \geqslant 1$, та індукцією по n отримуємо, що $|a_n| < |\lambda|^{n-1}|a_1| + |\lambda|^{n-2} + \cdots + |\lambda| + 1 + \dfrac{1}{|\lambda|} \leqslant |a_1| + \dfrac{1}{|\lambda|(1-|\lambda|)}$. При $|\lambda| = 1$ візьмемо $a_n = \dfrac{n}{2}\lambda^n$, а при $|\lambda| > 1$ візьмемо $a_n = \lambda^n$. В обох випадках послідовності задовольняють умову, але не є обмеженими.

Відповідь: $0 < |\lambda| < 1$.

12. Нехай $K \neq 0$. Тоді для деякого $x \in X$ $y = Kx \neq 0$ та для обмеженої множини $M = \{\alpha x | \alpha \in (0,1)\}$ множина $K(M) = \{\alpha y | \alpha \in (0,1)\}$ не є замкненою, а отже й не є компактною.

13. Оскільки $A^2 = AA^T = E$, то матриця A невироджена та звідси $A = A^T$, A — самоспряжена. Звідси $A = UBU^T$, де U — ортогональна матриця, а B — діагональна матриця з власними числами матриці A на діагоналі. Оскільки $A^2 = E$, то ці числа є коренями многочлена $\lambda^2 = 1$ та дорівнюють ± 1.

14. Нехай C_n — коло в $\mathbb{R}^2$ з центром в $(0,n)$ та радіусом n, $X = \cup_{n\geq 1} C_n \setminus [0,1]^2$ з евклідовою метрикою, а B — перетин з X круга в $\mathbb{R}^2$ з центром в $(0,0)$ та радіусом 2. Тоді X — зв'язний необмежений простір, але B не міститься в жодній зв'язній власній підмножині X.

15. При $\alpha_1 < \alpha_2$ маємо

$$\int_{\mathbb{R}^+} \exp(\alpha_1 (x+1)^t) d\mu(x) < \int_{\mathbb{R}^+} \exp(\alpha_2 (x+1)^t) d\mu(x),$$

а отже достатньо розглядати $0 < \alpha < 1$. Покладемо $\alpha < \beta < 1$. Тоді $\frac{\alpha(x+1)^t}{\beta x^t} \to \frac{\alpha}{\beta} < 1, x \to \infty$, а отже для деякого $c > 0$ маємо $\alpha(x+1)^t \leq \beta x^t, x \geq c$. Тоді

$$\int_{\mathbb{R}^+} \exp(\alpha(x+1)^t) d\mu(x) \leq \int_0^c \exp(\alpha(x+1)^t) d\mu(x) + \int_c^\infty \exp(\beta x^t) d\mu(x) \leq$$
$$\leq \exp(\alpha(c+1)^t) \int_0^\infty \exp(0 \cdot x^t) d\mu(x) + \int_0^\infty \exp(\beta x^t) d\mu(x) < \infty.$$

16. Див. задачу **8** для 1-2 курсів.

17. Див. задачу **9** для 1-2 курсів.

18. Неважко побудувати таку функцію $f \in C^{(1)}([x_0, x_n])$, що $f(x_i) = y_i$, $i = 0, \ldots, n$, та похідна f відокремлена від нуля на $[x_0, x_n]$, тобто $f'(x) \geqslant \delta > 0$ для деякого δ та всіх $x \in [x_0, x_n]$. Для кожного $\varepsilon > 0$ існує многочлен P_ε такий, що $\max\limits_{x \in [x_0, x_n]} |f'(x) - P_\varepsilon(x)| < \varepsilon$. Покладемо

$$Q_\varepsilon(x) := y_0 + \int_{x_0}^x P_\varepsilon(t)\, dt,\ x \in [x_0, x_n].$$

Тоді $\max\limits_{x\in[x_0,x_n]} |f(x)-Q_\varepsilon(x)| < \varepsilon(x_n-x_0)$. Нехай R_ε — многочлен Лагранжа, що в точках x_i інтерполює значення $y_i - Q_\varepsilon(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$. Розглянемо відображення, яке ставить у відповідність набору чисел $(z_0, \ldots, z_n)$ похідну інтерполяційного многочлена Лагранжа $R' = R'(z_0, \ldots, z_n)$, де $R(x_i) = z_i$, $i = 0, \ldots, n$. Це відображення є лінійним відображенням скінченновимірних просторів (бо $\deg R' \leqslant n$), тому воно є неперервним та існує $C > 0$ таке, що $\max\limits_{x\in[x_0,x_n]} |R'(x)| \leqslant C \cdot \max\limits_{0\leqslant k\leqslant n} |z_k|$. Виберемо $\varepsilon > 0$ так, що $C(x_n-x_0)\varepsilon+\varepsilon < \delta$. Тоді для $R_\varepsilon = R(y_0-Q_\varepsilon(x_0), \ldots, y_n-Q_\varepsilon(x_n))$ будемо мати $\max\limits_{x\in[x_0,x_n]} |R'(x)| + \varepsilon \leqslant \delta$. Звідси многочлен $Q_\varepsilon + R_\varepsilon$ буде шуканим, бо $\forall x \in [x_0, x_n]$ $Q'_\varepsilon + R'_\varepsilon > P_\varepsilon + \varepsilon - \delta > f'(x) - \delta > 0$.

Олімпіада 2003 року.

(Задачі 1–8 для 1–2 курсів, 5–12 — для 3–4 курсів)

1. Обчислити $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n+4}{n(3n+1)(3n+2)}$.

Розв'язок. Розкладемо дріб $\dfrac{9n+4}{n(3n+1)(3n+2)}$ у суму простих дробів. Маємо $\dfrac{9n+4}{n(3n+1)(3n+2)} = \dfrac{2}{n} - \dfrac{3}{3n+1} - \dfrac{3}{3n+2}$, звідки

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{9n+4}{n(3n+1)(3n+2)} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{2}{n} - \frac{3}{3n+1} - \frac{3}{3n+2}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{3}{n} - \frac{3}{3n} - \frac{3}{3n+1} - \frac{3}{3n+2}\right) = 3\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=3}^{3N+2} \frac{1}{n}\right) =$$

$$= 3\left(1 + \frac{1}{2} - \sum_{n=N+1}^{3N+2} \frac{1}{n}\right) = \frac{9}{2} - 3\sum_{k=1}^{2N+2} \frac{1}{N+k} =$$

$$= \frac{9}{2} - 3 \cdot \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{2N+2} \frac{1}{1+\frac{k}{N}} \to \frac{9}{2} - 3\int_0^2 \frac{dx}{1+x} = \frac{9}{2} - 3\ln 3,\ N \to \infty.$$

2. Обчислити границю $\lim\limits_{N\to\infty} \sqrt{N}\left(1 - \max\limits_{1\leqslant n\leqslant N} \{\sqrt{n}\}\right)$, де $\{x\}$ — дробова частина числа x.

Розв'язок. Спочатку оцінимо $\max\limits_{1\leqslant n\leqslant N} \{\sqrt{n}\}$. Оскільки $\{\sqrt{n}\} = \sqrt{n} - k$, $k^2 \leqslant n \leqslant (k+1)^2$, то при $k^2 \leqslant n \leqslant (k+1)^2$ маємо $\{\sqrt{n}\} \leqslant \sqrt{(k+1)^2-1} - k$, де рівність має місце при $n = (k+1)^2 - 1$. При $k < l$ маємо $1 - \left\{\sqrt{(k+1)^2-1}\right\} = k+1-\sqrt{(k+1)^2-1} = \frac{1}{k+1+\sqrt{(k+1)^2-1}} > \frac{1}{l+1+\sqrt{(l+1)^2-1}} = 1 - \left\{\sqrt{(l+1)^2-1}\right\}$,

отже $\left\{\sqrt{(k+1)^2-1}\right\}$ зростає по k. Звідси при $N = m^2-1$ $\max\limits_{1\leqslant n\leqslant N}\{\sqrt{n}\} = \left\{\sqrt{m^2-1}\right\} = \sqrt{m^2-1}-m+1$. Оскільки $\max\limits_{1\leqslant n\leqslant N}\{\sqrt{n}\}$ зростає по N, то при $m^2 \leqslant N \leqslant (m+1)^2-1$ маємо $\sqrt{m^2-1}-m+1 \leqslant \max\limits_{1\leqslant n\leqslant N}\{\sqrt{n}\} \leqslant \sqrt{(m+1)^2-1}-m$, а отже $1+m-\sqrt{(m+1)^2-1} \leqslant 1-\max\limits_{1\leqslant n\leqslant N}\{\sqrt{n}\} \leqslant m-\sqrt{m^2-1}$, $m^2 \leqslant N < (m+1)^2$. Але для цих значень N також маємо $m \leqslant \sqrt{N} < m+1$, $\frac{m}{m+1}\cdot(m+1)\left(m+1-\sqrt{(m+1)^2-1}\right) \leqslant \sqrt{N}\left(1-\max\limits_{1\leqslant n\leqslant N}\{\sqrt{n}\}\right) < \frac{m+1}{m}\cdot m\left(m-\sqrt{m^2-1}\right)$.
Оскільки $m\left(m-\sqrt{m^2-1}\right) = \frac{m}{m+\sqrt{m^2-1}} \to \frac{1}{2}$, $m\to\infty$ та $\frac{m}{m+1}\to 1$, $m\to\infty$, то $\lim\limits_{N\to\infty}\sqrt{N}\left(1-\max\limits_{1\leqslant n\leqslant N}\{\sqrt{n}\}\right) = \frac{1}{2}$.

3. Для кожного $n\in\mathbb{N}$ знайти найменше $k\in\mathbb{N}$, для якого існують $\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_k \in \mathbb{R}^n$ такі, що

$$\forall\,\vec{x}\in\mathbb{R}^n\ \exists\,a_1,\dots,a_k>0\ :\ \vec{x}=\sum_{i=1}^{k}a_ix_i$$

(тобто будь-який вектор простору розкладається за цим набором з додатними коефіцієнтами розкладу).
Розв'язок. При $k\leqslant n$ розклад $\vec{x}$ за $\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_k$ або існує не для кожного $\vec{x}$, або існує, але є єдиним та для деяких $\vec{x}$ містить від'ємні коефіцієнти. Тому $k\geqslant n+1$. Але для $k=n+1$ набір векторів $\vec{x}_1=(1,0,\dots,0)$, $\vec{x}_2=(0,1,0,\dots,0),\dots,\vec{x}_n=(0,\dots,0,1)$, $\vec{x}_{n+1}=(-1,-1,\dots,-1)$ є шуканим. Справді, для довільного вектора $\vec{x}$ можна підібрати $a_{n+1}>0$ так, щоб всі координати вектора $\vec{x}-a_{n+1}\vec{x}_{n+1}=\vec{x}+a_{n+1}(1,1,\dots,1)$ стали додатними, а тоді $\vec{x}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\vec{x}_i+a_{n+1}\vec{x}_{n+1}$, де $a_1,\dots,a_n$ — ці додатні координати.
Відповідь: $k=n+1$.

4. Для яких $n\in\mathbb{N}$ існують дійсні квадратні матриці A та B розміру $n\times n$ такі, що $\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}B\leqslant n$ та будь-яка дійсна квадратна матриця X, яка комутує з ними, пропорційна одиничній (тобто $X=\lambda I$, $\lambda\in\mathbb{R}$) ?
Розв'язок. Для $n=1$ будь-яка матриця пропорційна одиничній і можна взяти $A=(1)$, $B=(0)$, $\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}B=1=n$. Нехай $n\geqslant 2$, A — діагональна матриця $A=\operatorname{diag}(0,1,\dots,n-1)$, $\operatorname{rank}A=n-1$. Якщо матриця $X=(x_{ij})$ комутує з A, то при всіх i,j $(i-1)x_{ij}=(j-1)x_{ij}$, звідки при $i\neq j$ $x_{ij}=0$, а отже X — діагональна матриця. Нехай тепер всі елементи матриці B дорівнюють 1, $\operatorname{rank}B=1$ та $\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}B=n$. якщо матриця $X=\operatorname{diag}(x_{11},x_{22},\dots,x_{nn})$ комутує з B, то при всіх i,j $x_{ii}=x_{jj}$, а отже X — матриця, пропорційна одиничній. Отримали, що A та B існують при всіх $n\in\mathbb{N}$.

5. Довести нерівність $\sqrt{2\sqrt[3]{3\sqrt[4]{4\dots\sqrt[n]{n}}}}<2$, $n\geqslant 2$.
Розв'язок. Логарифмуючи обидві частини нерівності, зведемо її до вигляду

$\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \ln k < \ln 2,\ n \geqslant 2.$

Функція $\ln x$ є опуклою вгору на $(0, +\infty)$. Застосовуючи нерівність Єнсена, отримаємо

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \ln k \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \ln \frac{\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \cdot k}{\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \ln \frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!}}{\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}}.$$

Оскільки послідовність $\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \ln k$ є зростаючою, то переходячи до границі при $n \to \infty$ маємо

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \ln k < \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \ln k \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \ln \frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!}}{\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \ln \frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}}{\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!}} =$$

$$= (e-2) \ln \frac{e-1}{e-2} = (e-2) \ln \left(1 + \frac{1}{e-2}\right).$$

Залишилося довести, що $(e-2) \ln \left(1 + \frac{1}{e-2}\right) < \ln 2$, або $\left(1 + \frac{1}{e-2}\right)^{e-2} < 2$.

Функція $y(x) = (1+a)^x$ є опуклою вниз на $\mathbb{R}$, $a > -1$, тому її графік при $x \in (0,1)$ лежить під січною $y = 1 + ax$, тобто $(1+a)^x < 1 + ax$, $0 < x < 1$. Звідси при $a = \frac{1}{e-2}$, $x = e-2$ маємо $\left(1 + \frac{1}{e-2}\right)^{e-2} < 1 + \frac{e-2}{e-2} = 2$.

6. При кожному дійсному $x \neq 1$ знайти суму ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3^n} + \left(x^{3^n}\right)^2}{1 - x^{3^{n+1}}}.$$

Розв'язок. Маємо

$$\frac{x^{3^n} + \left(x^{3^n}\right)^2}{1 - x^{3^{n+1}}} = \frac{1 + x^{3^n} + x^{2\cdot 3^n}}{\left(1 - x^{3^n}\right)\left(1 + x^{3^n} + x^{2\cdot 3^n}\right)} - \frac{1}{1 - x^{3^{n+1}}} = \frac{1}{1 - x^{3^n}} - \frac{1}{1 - x^{3^{n+1}}},\ n \geqslant 0,$$

звідки $\sum\limits_{n=0}^{N} \frac{x^{3^n} + \left(x^{3^n}\right)^2}{1 - x^{3^{n+1}}} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1 - x^{3^{N+1}}} \to \begin{cases} \frac{1}{1-x},\ |x| > 1, \\ \frac{1}{1-x} - 1,\ |x| < 1, \\ 0,\ x = -1, \end{cases} N \to \infty.$

7. Для будь-яких натуральних $m \leqslant n$ довести нерівність

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^{m+k} C_m^k \left(\frac{k}{m}\right)^n \leqslant C_n^m \frac{m!}{m^m}.$$

Розв'язок. Знайдемо кількість сюр'єктивних відображень з $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$ в $N_m = \{1, 2, \dots, m\}$. Нехай A — множина всіх відображень з N_n в N_m, $A_{i_1,\dots,i_k}$ — множина всіх відображень з N_n в $N_m \backslash \{i_1, \dots, i_k\}$. Тоді множина всіх сюр'єктивних відображень з N_n в N_m дорівнює $A \backslash \bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i$. За формулою включень та виключень

$$\left|\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right| = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|.$$

Але $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k} = A_{i_1,\dots,i_k}$ містить $(m-k)^n$ відображень, бо для кожного з елементів N_n є $m-k$ можливих образів. Аналогічно A містить m^n відображень. Тому $\left|\bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i\right| = \sum\limits_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} C_m^k (m-k)^n = \sum\limits_{k=0}^{m-1} (-1)^{m-k+1} C_m^{m-k} k^n = \sum\limits_{k=0}^{m-1} (-1)^{m+k+1} C_m^k k^n$, $\left|A \backslash \bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i\right| = m^n - \sum\limits_{k=0}^{m-1} (-1)^{k+m+1} C_m^k k^n = \sum\limits_{k=0}^{m} (-1)^{k+m} C_m^k k^n$.

З іншого боку, довільну сюр'єкцію з N_n в N_m можна отримати так: спочатку вибрати m елементів, що будуть "представниками" прообразів всіх різних елементів з N_m, а потім довизначити відображення на інших $n-m$ елементах довільним чином. Отримуємо $C_n^m \cdot m! \cdot m^{n-m}$ відображень, серед яких пераховані всі сюр'єкції, але деякі з них, взагалі кажучи, по декілька разів, бо вибір "представників" не є однозначним. Тому

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^{m+k} C_m^k k^n \leqslant C_n^m \cdot m! \cdot m^{n-m},$$

а отже $\sum\limits_{k=0}^{m} (-1)^{m+k} C_m^k \left(\frac{k}{m}\right)^n \leqslant C_n^m \cdot \frac{m!}{m^m}$.

8. На площині намальовано параболу та відмічено її фокус F. Також дано трикутник T. За допомогою циркуля і лінійки побудувати трикутник, подібний до T, одна з вершин якого співпадає з F, а дві інші лежать на параболі.

Розв'язок. Нехай трикутник T має вершини A, B, C, а потрібно побудувати подібний до T трикутник з відповідними до A, B, C вершинами D, E, F. Зрозуміло, що задача зводиться до знаходження сторін трикутника DEF або, що те саме, до знаходження коефіцієнта подібності. Оскільки довільні дві параболи є подібними та коефіцієнтом подібності є відношення відстаней від їх центрів до директрис, то достатньо знайти ці відстані для параболи з умови задачі та параболи з фокусом C, що проходить через точки A та B. Знайдемо директриси цих парабол. Оскільки кожна з точок A, B є рівновіддаленою від директриси параболи та її фокуса C, то директриса є спільною дотичною до кіл з центрами A, B та радіусами AC, BC. Аналогічно для довільних точок G, H на параболі з умови задачі директриса є спільною дотичною до кіл з центрами G, H та радіусами GF, HF. Отже, за допомогою циркуля та лінійки можна знайти директриси парабол та відстані d_C, d_F від їх фокусів C, F до директрис. Тепер знаходимо сторони шуканого трикутника з умови $\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{DF}{AC} = \frac{d_F}{d_C}$ та будуємо відрізки DE, EF, DF та шуканий трикутник.

Задача може мати декілька розв'язків.

9. Чи існує така вимірна за Лебегом множина $A \subset \mathbb{R}^2$, що для будь-якої множини E нульової міри Лебега різниця множин $A \backslash E$ не є борельовою?

Розв'язок. Покажемо, що для кожної вимірної за Лебегом множини $A \subset \mathbb{R}^2$ існує борельова множина $B \subset A$ така, що для $E = A \backslash B$ $\lambda(E) = 0$. З побудови міри Лебега випливає, що при $A \neq \emptyset$ та $\lambda(A) < \infty$

$$\lambda(A) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(A_k) \,\middle|\, \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \supset A, \{A_k\} \subset K\right\} =$$
$$= \sup\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(A_k) \,\middle|\, \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset A, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j, \{A_k\} \subset K\right\},$$

де K — кільце, породжене множинами $(x_1, x_2] \times (y_1, y_2]$, $-\infty < x_1 < x_2 < \infty, -\infty < y_1 < y_2 < \infty$, а отже для $\varepsilon > 0$ знайдуться множини $A_k(\varepsilon) \subset A, k \geqslant 1$, $A_i(\varepsilon) \cap A_j(\varepsilon) = \emptyset, i \neq j$, $A_k(\varepsilon) \in K$, для яких $\bigcup\limits_k A_k(\varepsilon) = A(\varepsilon) \subset A$ — борельова множина та $\lambda\left(A(\varepsilon)\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda\left(A_k(\varepsilon)\right) > \lambda(A) - \varepsilon$, тобто $\lambda\left(A \backslash A(\varepsilon)\right) < \varepsilon$. Звідси $B = \bigcup\limits_{n \geqslant 1} A\left(\frac{1}{n}\right)$ — борельова множина, для якої $B \subset A$ та $\lambda(A \backslash B) \leqslant \lambda\left(A \backslash A\left(\frac{1}{n}\right)\right) < \frac{1}{n}$, $n \geqslant 1$, а отже $\lambda(A \backslash B) = 0$.

Тепер для довільної вимірної за Лебегом множини A при $n \geqslant 1$ покладемо $A^n = A \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant n\}, \lambda(A^n) < \infty$, та знайдемо борельові множини $B^n \subset A^n$, для яких $\lambda(A^n \backslash B^n) = 0$. Покладемо $B = \bigcup\limits_{n \geqslant 1} B^n$. Тоді $B \subset A$ та $\lambda(B \backslash A) = 0$.

10. Про дійсну симетричну матрицю $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ відомо, що вона має власний базис $\left\{e_k, k = \overline{1,n}\right\}$ з відповідними власними числами $\lambda_k, k = \overline{1,n}$. Побудувати таку дійсну симетричну невід'ємно визначену матрицю $X = (x_{ij})_{i,j=1}^n$, щоб відстань $d(X, A) = \sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{n} (x_{ij} - a_{ij})^2}$ була мінімальною.

Розв'язок. Оскільки матриця A є дійсною та симетричною, то маємо $\lambda_i(e_i, e_j) = (Ae_i, e_j) = (e_i, Ae_j) = \lambda_j(e_i, e_j)$, звідки при $\lambda_i \neq \lambda_j$ вектори e_i та e_j ортогональні. Тому існує ортонормований власний базис $\left\{f_k, k = \overline{1,n}\right\}$, для якого $Af_k = \lambda_k f_k$, $k = \overline{1,n}$. Але $d(X, A)$ — норма Гільберта-Шмідта оператора, що відповідає матриці $X - A$, а отже не залежить від вибору ортонормованого базису. Якщо в базисі $\{f_k\}$ оператори, які відповідають матрицям A та X, задаються матрицями $(\tilde{a}_{ij})$, $(\tilde{x}_{ij})$, то $\tilde{a}_{ij} = 0$, $i \neq j$ та $\tilde{a}_{ii} = \lambda_i$. Тому $d^2(X, A) = d^2(\tilde{X}, \tilde{A}) = \sum\limits_{i \neq j} \tilde{x}_{ij}^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} (\tilde{x}_{kk} - \lambda_k)^2 \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} (\min(\lambda_k, 0))^2$, бо з невід'ємної визначеності X випливає $\tilde{x}_{kk} \geqslant 0$. Рівність досягається тоді і лише тоді, коли $\tilde{x}_{ij} = 0$, $i \neq j$, та $\tilde{x}_{kk} = \max(\lambda_k, 0)$. Тому $\{f_k\}$ — власний базис для X з $Xf_k = \max(\lambda_k, 0)f_k$, а тоді й $Xe_k = \max(\lambda_k, 0)e_k$, $k = \overline{1, n}$. Тепер якщо S — матриця, стовпчиками якої є вектори $e_1, \ldots, e_n$, то $(\tilde{a}_{ij}) = S^{-1}AS$, $(\tilde{x}_{ij}) = S^{-1}XS$, а отже шукана матриця $X = S(\tilde{x}_{ij})S^{-1}$.

11. Нехай φ є конформним відображенням області $\Omega = \{\operatorname{Im} z > 0\} \backslash T$, де T — трикутник з вершинами $\{1, -1, i\}$, на верхню півплощину. Точка $z_0 \in \Omega$ така, що $\varphi(z_0) = z_0$. Довести, що $|\varphi'(z_0)| \geqslant 1$.

Розв'язок. Нехай ψ — дробово-лінійне відображення, що переводить верхню півплощину $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ у коло $\{\,|\omega| < 1\}$, причому $\psi(z_0) = 0$. Тоді ψ переводить Ω у $\{|\omega| < 1\} \backslash \psi(T)$. Покладемо $\Phi = \psi \circ \varphi^{-1} \circ \psi^{-1}$, де φ^{-1}, ψ^{-1} — обернені до φ, ψ відображення. Тоді Φ переводить $\{|\omega| < 1\}$ у $\{|\omega| < 1\} \backslash \psi(T)$ та

$$\begin{aligned}\Phi'(0) = \psi'\left(\varphi^{-1} \circ \psi^{-1}(0)\right) \cdot \left(\varphi'\left(\varphi^{-1} \circ \psi^{-1}(0)\right)\right)^{-1} \cdot \left(\psi'\left(\psi^{-1}(0)\right)\right) = \\ = \psi'(z_0) \cdot \left(\varphi'(z_0)\right)^{-1} \cdot \left(\psi'(z_0)\right)^{-1} = \left(\varphi'(z_0)\right)^{-1}.\end{aligned}$$

Оскільки при $|\omega| < 1$ $|\Phi(\omega)| < 1$ та $\Phi(0) = 0$, то за лемою Шварца маємо $\Phi(\omega)| \leqslant |\omega|$ при $|\omega| < 1$, а отже $|\Phi'(0)| \leqslant 1$, звідки $|\varphi'(z_0)| = |\Phi'(0)|^{-1} \geqslant 1$.

12. Вершини трикутника — незалежні рівномірно розподілені на колі одиничного радіуса випадкові точки. Підрахувати середнє значення площі цього трикутника.

Розв'язок. Нехай вершини трикутника мають координати $A(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $B(\cos\beta, \sin\beta)$, $C(\cos\gamma, \sin\gamma)$, де α, β, γ — незалежні однаково розподілені на $[0, 2\pi)$ випадкові величини. Виражаючи площу трикутника ABC через площі трикутників AOB, BOC та AOC, де O — центр кола, отримуємо, що для довільних α, β, γ площа трикутника ABC дорівнює

$$\frac{1}{2}\left|\sin(\beta - \alpha) + \sin(\gamma - \beta) + \sin(\alpha - \gamma)\right|,$$

а отже середнє значення площі

$$S = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_{[0,2\pi)^3} \frac{1}{2}\left|\sin(\beta - \alpha) + \sin(\gamma - \beta) + \sin(\alpha - \gamma)\right| d\alpha\, d\beta\, d\gamma.$$

Помітимо, що при $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma < 2\pi$ $\sin(\beta - \alpha) + \sin(\alpha - \gamma) + \sin(\alpha - \gamma) = \sin(\beta - \alpha) + \sin(\gamma - \beta) - \sin\left((\beta - \alpha) + (\gamma - \beta)\right) \geqslant 0$, а отже використовуючи симетрію підінтегрального виразу відносно α, β, γ маємо

$$S=\frac{6}{2\cdot(2\pi)^3}\iiint\limits_{0\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma<2\pi}(\sin(\beta-\alpha)+\sin(\gamma-\beta)+\sin(\alpha-\gamma))\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma=$$

$$=\frac{3}{8\pi^3}\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_\beta^{2\pi}\left(\int\limits_0^\beta(\sin(\beta-\alpha)+\sin(\gamma-\beta)+\sin(\alpha-\gamma))\,d\alpha\right)d\gamma\right)d\beta=$$

$$=\frac{3}{8\pi^3}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_\beta^{2\pi}(1-\cos\beta+\beta\sin(\gamma-\beta)-\cos(\beta-\gamma)+\cos\gamma)\,d\gamma\,d\beta=$$

$$=\frac{3}{8\pi^3}\int\limits_0^{2\pi}((2\pi-\beta)(1-\cos\beta)-\beta\cos\beta+\beta)\,d\beta=\frac{3}{8\pi^3}\int\limits_0^{2\pi}2\pi(1-\cos\beta)d\beta=\frac{3}{2\pi}.$$

Відповідь: $\frac{3}{2\pi}$.

Задачі запропонували: Т. О. Андрощук (11), А. В. Бондаренко (3,4,9), О. Г. Кукуш (1,5,6,10,12), Д. Ю. Мітін (2,7), Г. М. Шевченко (8).

Олімпіада 2004 року.
Завдання для 1–2 курсів.

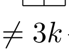
1. Довести, що для кожного натурального n виконується нерівність

$$\frac{1}{3!}+\frac{3}{4!}+\dots+\frac{2n-1}{(n+2)!}<\frac{1}{2}.$$

Розв'язок. При $n=1$ нерівність очевидна. При $n\geqslant 2$ маємо

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{(k+2)!}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{(k+1)!}-\frac{5}{(k+2)!}\right)=2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)!}-5\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{(k+1)!}=$$

$$=\frac{2}{2!}-3\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k+1)!}-\frac{5}{(n+2)!}<\frac{2}{2!}-\frac{3}{3!}=\frac{1}{2}.$$

2. З прямокутної дошки розміром $2\times n$ навмання вилучають одну клітинку. Знайти ймовірність того, що решту клітинок можна без перетинів покрити фігурками вигляду  (з довільною орієнтацією).

Розв'язок. Якщо $n\neq 3k+2$, то $2n-1$ не ділиться на 3 та покриття неможливе. При $n=3k+2$ покриття можливе тоді та лише тоді, якщо вирізану клітинку можна так доповнити фігуркою до квадрата, щоб по обидва боки від квадрата утворились прямокутники вигляду $2\times 3l$. Це можливо, якщо номер стовпчика, з якого вирізали клітинку, не ділиться на 3. Звідси знаходимо ймовірність $\frac{2k+2}{3k+2}$.

Відповідь: $\begin{cases} 0, & n \neq 3k+2, \\ \frac{2k+2}{3k+2}, & n = 3k+2. \end{cases}$

3. Довести, що для довільної неперервної та опуклої вниз на $[0,1]$ функції f виконується нерівність

$$\frac{2}{5}\int_0^1 f(x)\,dx + \frac{2}{3}\int_0^{3/5} f(x)\,dx \geqslant \int_0^{4/5} f(x)\,dx.$$

Розв'язок. Заміною змінної в інтегралах нерівність зводиться до рівносильного вигляду

$$\frac{2}{5}\int_0^1 f(x)\,dx + \frac{2}{5}\int_0^1 f\left(\frac{3}{5}x\right)dx \geqslant \frac{4}{5}\int_0^1 f\left(\frac{4}{5}x\right)dx.$$

Ця нерівність отримується інтегруванням нерівності $f(x)+f(\frac{3}{5}x) \geqslant 2f(\frac{4}{5}x)$, яка випливає з опуклості f.

4. Знайти всі такі непарні неперервні функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, що при всіх дійсних x виконується рівність $f(f(x)) = x$.

Розв'язок. Якщо $f(x_1) = f(x_2)$, то $x_1 = f(f(x_1)) = f(f(x_2)) = x_2$, отже f ін'єктивна. Тоді з неперервності випливає монотонність. Розглянемо спочатку зростаючу f. Тоді з $f(x_0) < x_0$ випливає $f(f(x_0)) < f(x_0) < x_0$ та з $f(x_0) > x_0$ випливає $f(f(x_0)) > f(x_0) > x_0$, суперечність. Отже, єдина зростаюча f це $f(x) \equiv x$. Тепер розглянемо спадну f. Тоді $-f(x)$ зростає та $-f(-f(x)) = f(f(x)) = x$. Отже, $-f(x) = x$, $x\in\mathbb{R}$, тобто $f(x) = -x$, $x \in \mathbb{R}$.

5. Для даної на малюнку параболи побудувати за допомогою циркуля та лінійки найбільше коло, що лежить всередині параболи і дотикається до неї в її вершині.

Розв'язок. В деякій системі координат рівняння параболи та кола $y = x^2$ та $x^2+(y-R)^2 = R^2$. Тоді за умовою $y = 0$ має бути єдиним невід'ємним коренем рівняння $y+(y-R)^2 = R^2$, звідки $R \leqslant \frac{1}{2}$. Отже, слід побудувати коло з центром $(0, \frac{1}{2})$ і радіусом $\frac{1}{2}$. Знайдемо осі координат. Для цього проведемо дві паралельні хорди параболи. Пряма l, що проходить через їх середини, паралельна до Oy. Проведемо хорду, перпендикулярну до l. Серединний перпендикуляр до цієї хорди є віссю Oy. Тепер знаємо вершину параболи і можемо провести Ox. Бісектриса кута між Ox та Oy перетне параболу в точці $(1,1)$. Тепер легко побудувати точку $(0, \frac{1}{2})$ та шукане коло.

6. Нехай A, B, C, D — такі прямокутні матриці, що $A^T = BCD$, $B^T = CDA$, $C^T = DAB$, $D^T = ABC$. Для матриці $S = ABCD$ довести, що $S^3 = S$.

Розв'язок. Маємо $S^3 = ABC\cdot DAB\cdot CDA\cdot BCD = D^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}BCD = ABCD = S$.

7. Нехай A_n — найбільше значення, що може приймати визначник матриці $n\times n$ елементами якої є 1 або -1. Чи існує скінченний $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{A_n}$?

Розв'язок. Побудуємо послідовність матриць B_n розміру $2^n \times 2^n$, $n \geqslant 0$, для яких $\sqrt[2^n]{\det B_n} \to \infty$, $n \to \infty$. Покладемо $B_0 = (1)$ та $B_{n+1} = \begin{pmatrix} B_n & B_n \\ -B_n & B_n \end{pmatrix}$, $n \geqslant 0$. Тоді $\det B_{n+1} = \det \begin{pmatrix} B_n & B_n \\ -B_n & B_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} B_n & B_n \\ 0 & 2B_n \end{pmatrix} = 2^{2^n} (\det B_n)^2$. Нехай $\det B_n = 2^{b_n}$. Тоді $b_0 = 0$ та $b_{n+1} = 2^n + 2b_n, n \geqslant 1$. Легко перевірити, що $b_n = n2^{n-1}, n \geqslant 0$. Тоді $\sqrt[2^n]{\det B_n} = 2^{\frac{b_n}{2^n}} = 2^{\frac{n}{2}} \to \infty$, $n \to \infty$.

8. $\{x_n,\, n \geqslant 1\}$ — послідовність додатних чисел з принаймні двома різними членами. Чи завжди $\varliminf\limits_{n\to\infty} (x_1 + \cdots + x_n - n\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}) > 0$?

Розв'язок. Нехай $x_k \neq x_m$. Покладемо $y_k = y_m = \sqrt{x_k x_m}$ та $y_n = x_n$, $n \neq k, m$. Тоді при всіх $n \geqslant \max\{k, m\}$ матимемо

$$x_1 + \ldots + x_n - n\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} = (x_k + x_m - 2\sqrt{x_k x_m}) +$$

$$+ (y_1 + \ldots + y_n - n\sqrt[n]{y_1 \cdot \ldots \cdot y_n}) \geqslant (\sqrt{x_k} - \sqrt{x_m})^2, \quad \text{а отже}$$

$$\varliminf_{n\to\infty} (x_1 + \ldots + x_n - n\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}) \geqslant (\sqrt{x_k} - \sqrt{x_m})^2 > 0.$$

9. Деяка перестановка елементів матриці переводить будь-яку невироджену матрицю розміру $n \times n$ у невироджену та одиничну в одиничну. Довести, що ця перестановка не змінює визначник матриці.

Розв'язок. Для $i \neq k$ та $j \neq l$ розглянемо матрицю, в якій в кожному рядку та в кожному стовпчику стоїть по одиниці, а решта елементів — нулі, причому дві з одиниць — у клітинках (i, j) та (k, l). Для того, щоб ця матриця перейшла у невироджену, клітинки (i, j) та (k, l) мають перейти у різні рядки та стовпчики. З того, що перестановка переводить елементи різних рядків та стовпчиків знову в елементи різних рядків та стовпчиків та елементи діагоналі в елементи діагоналі, можна вивести, що перестановка є композицією однакових перестановок рядків та стовпчиків та, можливо, транспонування. Тому вона не змінює визначник.

10. Прямокутник зі сторонами a_0, b_0 розбито на менші прямокутники зі сторонами a_k, b_k, $1 \leqslant k \leqslant n$. Сторони менших прямокутників паралельні до відповідних сторін великого прямокутника. Довести, що

$$|\sin a_0 \sin b_0| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\sin a_k \sin b_k|.$$

Розв'язок. Розглянемо $f(a, b) = \sup\limits_{u,v\in\mathbb{R}} \int\limits_0^a \int\limits_0^b \cos(2x + u)\cos(2y + v)\, dx\, dy$. Тоді з властивостей супремума випливає, що $f(a_0, b_0) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} f(a_k, b_k)$. Оскільки

$$\sup_{u\in\mathbb{R}} \int\limits_0^a \cos(2x + u) dx = \int\limits_{-a/2}^{a/2} \cos 2x dx = |\sin a|$$

та аналогічно $\sup\limits_{v\in\mathbb{R}}\int\limits_0^b \cos(2y+v)dy = |\sin b|$, то $f(a,b) = |\sin a\sin b|$, звідки випливає шукана нерівність.

Завдання для 3–4 курсів.

11. Нехай випадкова величина ξ однаково розподілена з $|\gamma|^\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$, де γ — стандартна нормальна величина. Для яких α існує $M\xi$?
Розв'язок. Існування $M\xi$ означає збіжність інтеграла

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^\alpha \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty x^\alpha e^{-x^2/2}dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\int_0^1 x^\alpha e^{-x^2/2}dx + \int_1^\infty x^\alpha e^{-x^2/2}dx\right).$$

Перший з інтегралів збігається при $\alpha > -1$, другий — при всіх $\alpha\in\mathbb{R}$.
Відповідь: $\alpha > -1$.
12. Див. задачу **2.** для 1–2 курсів.
13. Нормований простір Y називається строго нормованим, якщо для будь-яких $y_1, y_2\in Y$ таких, що $\|y_1\| = \|y_2\| = \left\|\dfrac{y_1+y_2}{2}\right\|$, виконується $y_1 = y_2$. Нехай X — нормований простір, $G\subset X$ — підпростір, X^* — спряжений простір — є строго нормованим. Довести, що для кожного функціонала з G^* існує єдине продовження з X^*, яке зберігає норму.
Розв'язок. Продовження існує за теоремою Хана-Банаха. Нехай $F_1, F_2\in X^*$ — два продовження $f\in G^*$. Тоді $\frac{1}{2}(F_1+F_2)$ — теж продовження f, $\left\|\frac{1}{2}(F_1+F_2)\right\| \geqslant \|f\|$. Але за нерівністю трикутника $\left\|\frac{1}{2}(F_1+F_2)\right\| \leqslant \frac{1}{2}(\|F_1\|+\|F_2\|) = \|f\|$, звідки $\|F_1\| = \|F_2\| = \left\|\frac{1}{2}(F_1+F_2)\right\|$. Оскільки X^* — строго опуклий, то $F_1 = F_2$.
14. Нехай $R(z) = \dfrac{z^2}{2} - z + \ln(1+z)$, $z\in\mathbb{C}$, $z\neq -1$. Довести нерівність

$$|R(ix)| \leqslant \frac{|x|^3}{3}$$

для всіх дійсних x. (Для логарифма береться головне значення, тобто вітка, що відповідає $R(0)=0$)
Розв'язок. Маємо $R(0)=0$, $\quad R(z) = \int\limits_0^z \left(s-1+\frac{1}{s+1}\right)ds = \int\limits_0^z \frac{s^2}{1+s}ds$, звідки

$$|R(ix)| = \left|\int\limits_0^{ix}\frac{s^2}{1+s}ds\right| = \left|\int\limits_0^{x}\frac{-t^2}{1+it}idt\right| \leqslant \left|\int\limits_0^{x}\frac{t^2}{|1+it|}dt\right| \leqslant \left|\int\limits_0^{x}t^2dt\right| = \frac{|x|^3}{3}.$$

15. Нехай A, B, C, D — такі дійсні прямокутні матриці, що $A^T = BCD$, $B^T = CDA$, $C^T = DAB$, $D^T = ABC$. Для матриці $S = ABCD$ довести, що $S^2 = S$.
Примітка: для молодших курсів пропонується довести, що $S^3 = S$.

Розв'язок. Маємо $S^3 = ABC\cdot DAB\cdot CDA\cdot BCD = D^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}BCD = ABCD = S$, отже $S^3 - S = (S+I)(S^2 - S) = 0$, де I — одинична матриця. Оскільки $S = D^{\mathrm{T}}D$ невід'ємно визначена, то $S+I$ додатно визначена та існує $(S+I)^{-1}$. Звідси $S^2 - S = (S+I)^{-1}(S^3 - S) = 0$.

16. Нехай e — ненульовий вектор в $\mathbb{R}^2$. Побудувати таку невироджену матрицю $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, що для $f_d(x) := \|A(x+d)\|^2$, $x, d \in \mathbb{R}^2$, множина пар $M := \{(x,y) :\ f_e(x) = 1,\ f_{-e}(y) = 1$ та існують такі дійсні λ, μ, що (x,y) є стаціонарною точкою функції Лагранжа $F(x,y) := \|x-y\|^2 + \lambda f_e(x) + \mu f_{-e}(y)\}$ містить щонайменше 8 пар.

Розв'язок. Пара (x,y) є стаціонарною точкою F при деяких λ, μ, якщо в цій точці досягається умовний максимум або мінімум $\|y-x\|$ при умові $f_e(x) = f_{-e}(x) = 1$. Геометрично це означає, що вектор $y-x$ ортогональний до еліпсів $\{f_e(x) = 1\}$ та $\{f_{-e}(x) = 1\}$. Нехай (e,g) — базис в $\mathbb{R}^2$, $e \perp g$ та $\|g\| = \|e\|$. Визначимо A так, що $Ae = \frac{e}{2\|e\|}$, $Ag = \frac{g}{3\|g\|}$. Тоді радіус-вектори кінців малої осі еліпса $\{f_e(x) = 1\}$ це $x_1 = e$ та $x_2 = -3e$, а кінців малої осі еліпса $\{f_{-e}(x) = 1\}$ — $y_1 = -e$ та $y_2 = 3e$. З цих векторів можна утворити 4 пари (x_i, y_j), $i,j = 1,2$. Оскільки для цих пар $\|x_i - y_j\| \leqslant 6\,\|e\|$, а для точок еліпсів $-e+3g, e-3g$ відстань $\sqrt{40}\,\|e\| > 6\,\|e\|$, то максимум досягається для деякої іншої пари (x_0, y_0) та для пари, симетричної цій відносно прямої, що містить вектор e. Нарешті, ще дві пари (x,y) з $x = y$ — це точки перетину еліпсів.

17. Див. задачу **9.** для 1–2 курсів.

18. Ведучий та два гравця грають в наступну гру. Ведучий задумує ціле число від 1 до 2004, кожне число з однаковою ймовірністю. Гравці по черзі називають натуральні числа, а ведучий відповідає "більше", "менше" або "вгадав". Виграє той, хто назве задумане число. Доведіть, що кожен з гравців може грати так, щоб виграти з ймовірністю не менше 1/2.

Розв'язок. Припустимо, що відомо, що ведучий задумав число з інтервалу $[a, a+k-1]$. Нехай $d(k) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2k}odd(k)$, де $odd(k) = \begin{cases} 1, \text{якщо } k \text{ непарне,} \\ 0, \text{якщо } k \text{ парне.} \end{cases}$

Доведемо індукцією по k, що гравець, що першим має називати число, виграє з ймовірністю принаймні $d(k)$, а його суперник — з ймовірністю принаймні $1 - d(k)$. Зауважимо, що числа $a, a+1, ..., a+k-1$ задумані з апріорною ймовірністю $\frac{1}{k}$. Для $k = 1$ твердження очевидне. Припустимо, що твердження доведене для $k \leqslant n-1$ та доведемо його для $k = n$. Нехай перший гравець називає a. Тоді він одразу виграє з ймовірністю $\frac{1}{n}$ або стає другим гравцем у ситуації з $n-1$ числами. За припущенням індукції він виграє з ймовірністю принаймні

$$\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}\left(1 - d(n-1)\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\left(1 - odd(n-1)\right) = d(n).$$

Тепер розглянемо шанси на виграш другого гравця. Якщо перший гравець назве c, $c \notin [a, a+n-1]$, то другий гравець стане першим та покращить свої шанси. Нехай перший гравець називає $a+m-1$, $1 \leqslant m \leqslant n$. Тоді другий одразу програє з ймовірністю $\frac{1}{n}$ або стає першим гравцем у ситуації з $m-1$ або $n-m$ числами. За припущенням індукції він виграє з ймовірністю принаймні

$$\frac{m-1}{n}d(m-1)+\frac{n-m}{n}d(n-m)=\frac{n-1}{2n}+\frac{1}{2n}\left(odd(m-1)+odd(n-m)\right)\geqslant$$
$$\geqslant\frac{n-1}{2n}+\frac{1}{2n}\left(1-odd(n)\right)=1-d(n).$$

За принципом математичної індукції твердження доведене. Результат задачі отримуємо при $n=2004$ та $a=1$.

19. Див. задачу **10.** для 1–2 курсів.

20. Чи існує послідовність $\{x_n,\, n\geqslant 1\}$ векторів з l_2 одиничної норми, що задовольняє умову $(x_n,x_m)<-\dfrac{1}{2004}$ при $n\neq m,\ n,m\in\mathbb{N}$?

Відповідь: ні.

Розв'язок. Якщо послідовність $\{x_n\}$ існує, то при $n\geqslant 2005$ маємо

$$\|x_1+\ldots+x_n\|^2=\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i,x_j)<n-\frac{n(n-1)}{2004}\leqslant 0,$$

протиріччя.

Задачі запропонували: А. В. Бондаренко (7,20), В. Б. Брайман (6,9,15,17), О. Г. Кукуш (2,4,12,16), Д. Ю. Мітін(8,14), Ю. С. Мішура (11), О. Н. Нестеренко(13), Жолт Палеш(Zsolt Páles)(Угорщина) (10,19), А. В. Примак (3), Р. П. Ушаков (1), Ж. Т. Черноусова (5), С. В. Шкляр (18).