69-та Студентська математична олімпіада імені Вільяма Ловела Патнема

Неділя, 7 грудня 2008 р.

Частина **B**

B1. Яка найбільша кількість раціональних точок може лежати на колі у площині, центр якого не є раціональною точкою? (*Раціональна точка* — це точка, обидві координати якої є раціональними числами.)

B2. Нехай $F_0 = \ln x$. Для $n \geq 1$ та $x > 0$ покладемо $F_n(x) = \displaystyle\int_0^x F_{n-1}(t)\,dt$. Обчислити $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n!F_n(1)}{\ln n}$.

B3. Який найбільший радіус може мати коло, що міститься у 4-вимірному гіперкубі з довжиною ребра 1?

B4. Нехай число p просте. Відомо, що $h(x)$ — такий многочлен з цілими коефіцієнтами, що залишки від ділення на p^2 чисел $h(0)$, $h(1)$, $\ldots$, $h(p^2-1)$ попарно різні. Довести, що залишки від ділення на p^3 чисел $h(0)$, $h(1)$, $\ldots$, $h(p^3-1)$ також попарно різні.

B5. Знайти всі такі неперервно диференційовні функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що для кожного раціонального q число $f(q)$ також раціональне та має такий самий знаменник, як q. (Знаменник раціонального числа q — це таке єдине натуральне число b, що $q = a/b$ для деякого цілого a, взаємно простого з b.)

B6. Нехай дано натуральні числа n та k. Перестановку σ множини $\{1, 2, \ldots n\}$ назвемо *k-обмеженою*, якщо $|\sigma(i) - i| \leq k$ для всіх i. Довести, що кількість k-обмежених перестановок множини $\{1, 2, \ldots n\}$ непарна тоді й тільки тоді, коли $n \equiv 0$ чи $1 \pmod{2k+1}$.