69-та Студентська математична олімпіада імені Вільяма Ловела Патнема

Неділя, 7 грудня 2008 р.

Частина **A**

A1. Нехай функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ така, що $f(x,y) + f(y,z) + f(z,x) = 0$ для всіх дійсних x, y та z. Довести, що існує така функція $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що $f(x,y) = g(x) - g(y)$ для всіх дійсних x та y.

A2. Алан та Барбара грають у гру, в якій вони по черзі заповнюють клітинки таблиці 2008×2008, що спочатку була порожньою. Алан ходить першим. Кожним своїм ходом гравець обирає дійсне число та пише його на довільне порожнє місце. Гра закінчується, коли таблицю повністю заповнено. Алан виграє, якщо визначник отриманої матриці ненульовий, а Барбара — якщо нульовий. У кого з гравців є виграшна стратегія?

A3. Дано скінченну послідовність натуральних чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. На кожному кроці вибирають, якщо це можливо, такі два номери $j < k$, що a_k не ділиться на a_j, та замінюють a_j та a_k на НСД(a_j, a_k) та НСК(a_j, a_k) відповідно. Довести, що якщо цю процедуру повторювати, вона зрештою зупиниться та кінцева послідовність не залежатиме від зроблених виборів. (Тут НСД та НСК — найбільший спільний дільник та найменше спільне кратне відповідно.)

A4. Функцію $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ визначено співвідношенням

$$f(x) = \begin{cases} x\,, & \text{якщо } x \le e\,; \\ x f(\ln x)\,, & \text{якщо } x > e\,. \end{cases}$$

Чи збігається ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}$?

A5. Нехай дано натуральне $n \ge 3$. Нехай $f(x)$ та $g(x)$ — такі многочлени з дійсними коефіцієнтами, що точки $\big(f(1), g(1)\big)$, $\big(f(2), g(2)\big)$, $\ldots$, $\big(f(n), g(n)\big)$ на площині є вершинами правильного n-кутника, переліченими проти годинникової стрілки. Довести, що хоча б в одного з многочленів $f(x)$ та $g(x)$ степінь не менший за $n-1$.

A6. Довести, що існує така стала $c > 0$, що в кожній нетривіальній скінченній групі G знайдеться послідовність елементів довжини не більше за $c \ln |G|$ з такою властивістю: кожен елемент G дорівнює добутку елементів деякої підпослідовності цієї послідовності. (Елементи G у послідовності не обов'язково різні. *Підпослідовність* послідовності отримують, вибираючи деякі з її елементів, не обов'язково послідовні, без зміни їхнього порядку; наприклад, $4, 4, 2$ є підпослідовністю послідовності $2, 4, 6, 4, 2$, а $2, 2, 4$ не є її підпослідовністю.)