Відкрита студентська олімпіада механіко-математичного факультету
22 лютого 2010 року
Завдання для 1–2 курсів

ММО
ВІДКРИТА ОЛІМПІАДА МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНОГО ФАКУЛЬТЕТУ

Задача 1. *Чи існує така сукупність функцій $f_\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, що перетин графіків будь-яких двох різних функцій цієї сукупності містить рівно 3 точки, а перетин графіків будь-яких трьох різних функцій — рівно 2 точки?* *(О.Г. Кукуш)*

Задача 2. *Послідовність $\{a_n,\ n \geqslant 1\}$ задовольняє умову $[(n+1)a_n] = [na_{n+1}]$, $n \geqslant 1$ (тут $[x]$ — ціла частина числа x). Довести, що існує таке $c \in \mathbb{R}$, що $|a_n - cn| < 1$ при всіх $n \geqslant 1$.* *(В.Б. Брайман)*

Задача 3. *Нехай функції $f, g \in C([a,b])$ є диференційовними на (a,b) та $g(x) \neq 0$, $x \in [a,b]$. Довести, що існує $x \in (a,b)$ таке, що*

$$f'(x)(ag(b) - bg(a)) - g'(x)(af(b) - bf(a)) = \left(\frac{f}{g}\right)'(x)(a-b)g(a)g(b).$$

(Д.Ю. Мітін)

Задача 4. *Нехай $S = S(A_1, \ldots, A_k)$ — найменша множина дійсних матриць розміру $n \times n$, $n \geqslant 2$, яка має властивості:*

а) $A_1, \ldots, A_k \in S$;

б) якщо $A, B \in S$ та $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то $\alpha A + \beta B \in S$ та $AB \in S$.

При якому найменшому k знайдуться такі матриці $A_1, \ldots, A_k$, що $S(A_1, \ldots, A_k) = M_n(\mathbb{R})$? *(М.В. Зельдіч)*

Задача 5. *Послідовність $\{x_n,\ n \geqslant 1\}$ задано рекурентним співвідношенням $x_{n+1} = x_n + e^{-x_n}$, $n \geqslant 1$, та початковою умовою $x_1 = 1$. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{\ln n}$.* *(А.А. Дороговцев)*

Задача 6. *Нехай n — фіксоване натуральне число. Визначити найменше k, при якому для довільних дійсних чисел a_{ij}, $1 \leqslant i,j \leqslant n$, існує такий дійсний многочлен $P(x,y)$ степеня щонайбільше k, що $P(i,j) = a_{ij}$ при всіх $1 \leqslant i,j \leqslant n$.* *(В.Б. Брайман)*

Задача 7. *Нехай A — симетрична вироджена матриця розміру $n \times n$, $n \geqslant 2$, з цілими коефіцієнтами. Позначимо через A_i матрицю, яка утворюється з A викреслюванням i-го рядка та i-го стовпчика, $1 \leqslant i \leqslant n$. Нехай $\det A_1 = 2010$. Довести, що $\det A_i$ ділиться на 2010 при кожному $2 \leqslant i \leqslant n$.* *(Д.В. Радченко)*

Задача 8. *На площині задано точки $P_1, \ldots, P_n$, не всі з яких лежать на одній прямій. Для всіх $1 \leqslant i,j,k \leqslant n$, $i \neq j$, покладемо*

$$\delta_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{якщо точка } P_k \text{ лежить на прямій } P_iP_j, \\ 0, & \text{якщо точка } P_k \text{ не лежить на прямій } P_iP_j. \end{cases}$$

Довести, що вектори $\overrightarrow{v}_{ij} = (\delta_{ij1}, \delta_{ij2}, \ldots, \delta_{ijn})$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, є системою твірних в $\mathbb{R}^n$. *(Т.Д. Тимошкевич)*

Задача 9. *Знайти, при якому найменшому $N \geqslant 3$ на площині можна розташувати $N+1$ однакових еліпсів $E, E_1, \ldots, E_N$ таким чином, щоб жодні два еліпси не перетинались та при кожному $1 \leqslant i \leqslant N$ еліпс E_i дотикався до еліпсів E_{i-1}, E_{i+1} та E (тут $E_0 = E_N$, $E_{N+1} = E_1$).* *(С.В. Слободянюк)*

Використання калькуляторів, літератури, мобільних телефонів, ноутбуків та консультації з сусідами забороняються.