Відкрита студентська олімпіада механіко-математичного факультету
22 лютого 2010 року
Завдання для 3–4 курсів

ММО
ВІДКРИТА ОЛІМПІАДА МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНОГО ФАКУЛЬТЕТУ

Задача 1. *Нехай f — така вимірна за Лебегом функція на $\mathbb{R}$, що $x^3 f(x) \to 1$, $x \to +\infty$. Знайти* $\lim\limits_{c\to+\infty}\left(c \cdot \int\limits_{c}^{+\infty} (x-c)f(x)\,dx\right)$. *(О.Г. Кукуш)*

Задача 2. *Нехай функція f є опуклою на $[-1,1]$, $0<\alpha<1$. Довести нерівність*

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\alpha \sin x)dx \leqslant \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\sin x)dx.$$

(Д.Ю. Мітін)

Задача 3. *Нехай випадкові вектори (ξ,η) та $(\xi, f(\xi))$ мають однаковий розподіл, де f — деяка борелева функція на $\mathbb{R}$. Довести, що $\eta = f(\xi)$ м.н.* *(О.Г. Кукуш)*

Задача 4. *Нехай $S = S(A_1,\dots,A_k)$ — найменша множина дійсних матриць розміру $n\times n$, $n \geqslant 2$, яка має властивості:*
а) $A_1,\dots,A_k \in S$;
б) якщо $A,B\in S$ та $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, то $\alpha A+\beta B\in S$ та $AB\in S$.
При якому найменшому k знайдуться такі матриці $A_1,\dots,A_k$, що $S(A_1,\dots,A_k) = M_n(\mathbb{R})$?
(М.В. Зельдіч)

Задача 5. *Нехай n — фіксоване натуральне число. Визначити найменше k, при якому для довільних дійсних чисел a_{ij}, $1\leqslant i,j\leqslant n$, існує такий дійсний многочлен $P(x,y)$ степеня щонайбільше k, що $P(i,j)=a_{ij}$ при всіх $1\leqslant i,j\leqslant n$.* *(В.Б. Брайман)*

Задача 6. *Чи можна у лінійному просторі*

$$X = \{x = (x_1,\dots,x_n,0,0,\dots)\,|\,n\geqslant 1,\ x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}\}$$

ввести таку норму, щоб функція $f(x)=x_1$, $x\in X$, була розривною? (О.Г. Кукуш, С.В. Шкляр)

Задача 7. *На площині задано точки $P_1,\dots,P_n$, не всі з яких лежать на одній прямій. Для всіх $1\leqslant i,j,k\leqslant n$, $i\neq j$, покладемо*

$$\delta_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{якщо точка } P_k \text{ лежить на прямій } P_iP_j, \\ 0, & \text{якщо точка } P_k \text{ не лежить на прямій } P_iP_j. \end{cases}$$

Довести, що вектори $\overrightarrow{v}_{ij} = (\delta_{ij1},\delta_{ij2},\dots,\delta_{ijn})$, $1\leqslant i<j\leqslant n$, є системою твірних в $\mathbb{R}^n$.
(Т.Д. Тимошкевич)

Задача 8. *Знайти, при якому найменшому $N\geqslant 3$ на площині можна розташувати $N+1$ однакових еліпсів $E, E_1,\dots,E_N$ таким чином, щоб жодні два еліпси не перетинались та при кожному $1\leqslant i\leqslant N$ еліпс E_i дотикався до еліпсів E_{i-1}, E_{i+1} та E (тут $E_0=E_N$, $E_{N+1}=E_1$).*
(С.В. Слободянюк)

Задача 9. *Нехай $\xi_1,\dots,\xi_n$ — незалежні гаусівські випадкові вектори в $\mathbb{R}^n$, які мають нульове середнє та одиничну матрицю коваріацій. Знайти математичне сподівання визначника Грама $\Gamma(\xi_1,\dots,\xi_n) = \det\bigl((\xi_i,\xi_j)\bigr)_{i,j=1}^n$.* *(А.А. Дороговцев)*

Використання калькуляторів, літератури, мобільних телефонів, ноутбуків та консультації з сусідами забороняються.