Відкрита студентська олімпіада механіко-математичного факультету 23 лютого 2009 року Завдання для 1–2 курсів

Задача 1. *У коло вписано трикутник ABC. Чи завжди на колі знайдеться така точка D, що у чотирикутник $ABCD$ можна вписати коло? (О.Г. Кукуш)*

Задача 2. *Нехай $F_0 = 0, F_1 = 1, F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$, $k \geqslant 2$ — числа Фібоначчі. Знайти усі такі натуральні n, що многочлен $F_n x^{n+1} + F_{n+1} x^n - 1$ є незвідним у кільці многочленів з раціональними коефіцієнтами $\mathbb{Q}[x]$. (Р.П. Ушаков)*

Задача 3. *Нехай A, B, C — кути гострокутного трикутника. Довести нерівності:*

$$\text{а)}\quad \frac{\cos A}{\sin B \sin C} + \frac{\cos B}{\sin C \sin A} + \frac{\cos C}{\sin A \sin B} \geqslant 2;$$

$$\text{б)}\quad \frac{\cos A}{\sqrt{\sin B \sin C}} + \frac{\cos B}{\sqrt{\sin C \sin A}} + \frac{\cos C}{\sqrt{\sin A \sin B}} \leqslant \sqrt{3}.$$

(О.Г. Кукуш, М.М. Рожкова)

Задача 4. *При яких натуральних n існують такі матриці $A, B, C \in M_n(\mathbb{Z})$, що*

$$ABC + BCA + CAB = E?$$

Тут E — одинична матриця. (В.Б. Брайман)

Задача 5. *Нехай $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — такі функції, що $\big(x(t) - x(s)\big)\big(y(t) - y(s)\big) \geqslant 0$ при всіх $t, s \in \mathbb{R}$. Довести що існують дві неспадні функції $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ та функція $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такі, що $x(t) = f(z(t))$ та $y(t) = g(z(t))$ при всіх $t \in \mathbb{R}$. (Ж. Дене (Бельгія), В.Б. Брайман)*

Задача 6. *Про послідовність $\{x_n,\, n \geqslant 1\}$ дійсних чисел відомо, що існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$. Довести, що при довільному $p > 1$ існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} \sum\limits_{k=1}^{n} k^{p-1} x_k$. (Д.Ю. Мітін)*

Задача 7. *Нехай $K(x) = xe^{-x}, x \in \mathbb{R}$. При кожному $n \geqslant 3$ знайти*

$$\sup_{x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}} \min_{1 \leqslant i < j \leqslant n} K(|x_i - x_j|).$$

(А.В. Бондаренко, Е. Сафф (США))

Задача 8. *Чи існує функція $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ така, що при довільних $x, y \in \mathbb{Q}$, $x \neq y$, має місце нерівність $f(x)f(y) \leqslant |x - y|$ та для кожного $x \in \mathbb{Q}$ множина $\big\{y \in \mathbb{Q} \,|\, f(x)f(y) = |x - y|\big\}$ є нескінченною? (В.Б. Брайман)*

Задача 9. *При яких $n \geqslant 2$ можна занумерувати всі перестановки множини $\{1, \ldots, n\}$ числами від 1 до $n!$ таким чином, щоб для будь-якої пари перестановок σ, τ з сусідніми номерами, а також для пари перестановок з номерами 1 та $n!$, для будь-якого $1 \leqslant k \leqslant n$ виконувалось $\sigma(k) \neq \tau(k)$? (О. В. Руденко)*

Використання калькуляторів, літератури, мобільних телефонів, ноутбуків та консультації з сусідами забороняються.