Відкрита студентська олімпіада механіко-математичного факультету 23 лютого 2009 року Завдання для 3–4 курсів

Задача 1. *При яких натуральних n існують такі матриці $A, B, C \in M_n(\mathbb{Z})$, що*

$$ABC + BCA + CAB = E?$$

Тут E — одинична матриця. *(В.Б. Брайман)*

Задача 2. *Нехай $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — такі функції, що $\big(x(t) - x(s)\big)\big(y(t) - y(s)\big) \geqslant 0$ при всіх $t, s \in \mathbb{R}$. Довести, що існують дві неспадні функції $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ та функція $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такі, що $x(t) = f(z(t))$ та $y(t) = g(z(t))$ при всіх $t \in \mathbb{R}$.* *(Ж. Дене (Бельгія), В.Б. Брайман)*

Задача 3. *Про послідовність $\{x_n,\, n \geqslant 1\}$ дійсних чисел відомо, що існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$. Довести, що при довільному $p > 1$ існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} \sum\limits_{k=1}^{n} k^{p-1} x_k$.*

(Д.Ю. Мітін)

Задача 4. *Нехай $K(x) = xe^{-x}, x \in \mathbb{R}$. При кожному $n \geqslant 3$ знайти*

$$\sup_{x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}} \min_{1 \leqslant i < j \leqslant n} K(|x_i - x_j|).$$

(А.В. Бондаренко, Е. Сафф (США))

Задача 5. *Чи існує функція $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ така, що при довільних $x, y \in \mathbb{Q}$, $x \neq y$, має місце нерівність $f(x)f(y) \leqslant |x - y|$ та для кожного $x \in \mathbb{Q}$ множина $\big\{y \in \mathbb{Q} \,|\, f(x)f(y) = |x - y|\big\}$ є нескінченною?* *(В.Б. Брайман)*

Задача 6. *Нехай μ — така міра на борелевій $\sigma-$алгебрі в $\mathbb{R}$, що $\int_{\mathbb{R}} e^{ax} d\mu(x) < \infty$ при всіх $a \in \mathbb{R}$, причому $\mu\big((-\infty, 0)\big) > 0$, $\mu\big((0, +\infty)\big) > 0$. Довести, що існує єдине дійсне a таке, що $\int_{\mathbb{R}} xe^{ax} d\mu(x) = 0$.* *(О.Г. Кукуш)*

Задача 7. *Нехай $\{\xi_n,\, n \geqslant 0\}$ та $\{\nu_n,\, n \geqslant 1\}$ — незалежні одна від одної послідовності незалежних однаково розподілених (у кожній послідовності) випадкових величин. Відомо, що $M\xi_0 = 0$ та $P\{\nu_1 = 1\} = p$, $P\{\nu_1 = 0\} = 1 - p$, $p \in (0, 1)$. Покладемо $x_0 = 0$ та $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \nu_k, n \geqslant 1$. Довести, що з імовірністю одиниця $\dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n} \xi_{x_k} \to 0$, $n \to \infty$.* *(А.А. Дороговцев)*

Задача 8. *Нехай $X_1, \ldots, X_{2n}$ — незалежні однаково розподілені випадкові величини, причому $X_1 \neq 0$ м.н. Покладемо*

$$Y_k = \frac{\left|\sum_{i=1}^{k} X_i\right|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{k} X_i^2}},\ 1 \leqslant k \leqslant 2n.$$

Довести нерівність $\mathsf{M}(Y_{2n}^2) \leqslant 1 + 4(\mathsf{M}Y_n)^2$. *(С. Новак, Великобританія)*

Задача 9. *При яких $n \geqslant 2$ можна занумерувати всі перестановки множини $\{1, \ldots, n\}$ числами від 1 до $n!$ таким чином, щоб для будь-якої пари перестановок σ, τ з сусідніми номерами, а також для пари перестановок з номерами 1 та $n!$, для будь-якого $1 \leqslant k \leqslant n$ виконувалось $\sigma(k) \neq \tau(k)$?* *(О. В. Руденко)*