Відкрита студентська олімпіада механіко-математичного факультету 17 березня 2008 року Завдання для 1–2 курсів

Задача 1. *Знайти* $\inf\{a+b+c\ :\ a,b,c>0,\ \sin a\cdot\sin b\cdot\sin c=\frac{3}{\pi}\,abc\}$. *(В. Б. Брайман)*

Задача 2. *Нехай f — неперервна і обмежена на $\mathbb{R}$ функція така, що*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x+h)-2f(x)+f(x-h)|\to 0 \quad \text{при} \quad h\to 0.$$

Чи обов'язково f рівномірно неперервна на $\mathbb{R}$? *(А. В. Бондаренко, А. В. Примак)*

Задача 3. *Нехай f — чотири рази диференційовна, парна функція на $\mathbb{R}$, $g(x)=f(\sqrt{x}\,), x\geqslant 0$. Довести, що функція g є двічі диференційовною при $x=0$, та знайти зв'язок між $g''(0)$ та похідними f в нулі.* *(О. Г. Кукуш)*

Задача 4. *Функція $f:[4,+\infty)\to\mathbb{R}$ задовольняє умови:*

а) $f(x^2)=f(x)+[\log_2\log_2 x]^{-2}$, де $[t]$ — ціла частина t;

б) існує $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Довести, що f є монотонною. *(О. Г. Кукуш)*

Задача 5. *Нехай многочлен $P(x)=x^n+p_{n-1}x^{n-1}+\ldots+p_0$ має рівно m $(2\leqslant m\leqslant n)$ різних комплексних коренів. Довести, що принаймні один з коефіцієнтів $p_{n-1},\ \ldots,\ p_{n-m}$ не дорівнює 0.* *(О. В. Рибак)*

Задача 6. *Нехай A — комплексна матриця розміру $n\times k$ така, що $A^T\cdot A=0$. Знайти найбільший можливий ранг матриці A.* *(В. Б. Брайман, О. В. Руденко)*

Задача 7. *Нехай $f\in C^\infty(\mathbb{R}\setminus\{0\})\cap C(\mathbb{R})$, причому*

$$\forall\, n\in\mathbb{N}: \quad f(x)=o(x^n),\ x\to 0.$$

Чи обов'язково $f\in C^1(\mathbb{R})$? *(О. Н. Нестеренко)*

Задача 8. *Для дійсної квадратної матриці $A=(a_{ij})_{i,j=1}^n$ покладемо $A^S=(\widetilde{a}_{ij})_{i,j=1}^n$, де*

$$\widetilde{a}_{ij}=\begin{cases} a_{ji}, & \text{якщо } i+j \text{ непарне},\\ a_{ij}, & \text{якщо } i+j \text{ парне}.\end{cases}$$

Знайти усі квадратні матриці A такі, що для довільної матриці B такого ж розміру справджується рівність $(AB)^S=B^SA^S$. *(В. Б. Брайман)*

Задача 9. *На координатній площині відмічено n точок з натуральними координатами. Відомо, що якщо точка (x,y) відмічена, то відмічені також усі точки з натуральними координатами (x',y'), для яких $x'\leqslant x$, $y'\leqslant y$. Для кожної відміченої точки (x,y) позначимо через $R(x,y)$ кількість відмічених точок (x',y'), для яких $x'\geqslant x$ та $y'\geqslant y$ (сама точка (x,y) теж враховується). Довести, що існує принаймні $n/4$ точок (x,y), для яких $R(x,y)$ є непарним числом.* *(О. В. Рибак)*

Використання калькуляторів, літератури, мобільних телефонів, ноутбуків та консультації з сусідами забороняються.