Відкрита студентська олімпіада механіко-математичного факультету 17 березня 2008 року Завдання для 3–4 курсів

Задача 1. *Нехай многочлен* $P(x) = x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \ldots + p_0$ *має рівно* m $(2 \leqslant m \leqslant n)$ *різних комплексних коренів. Довести, що принаймні один з коефіцієнтів* $p_{n-1}, \ldots, p_{n-m}$ *не дорівнює 0.* *(О. В. Рибак)*

Задача 2. *Нехай* ξ *— така випадкова величина, що* ξ *та* ξ^2 *незалежні. Довести, що існує таке число* c*, що* $\cos\xi = c$ *майже напевно.* *(С. Новак, Великобританія)*

Задача 3. *Нехай* A *— комплексна матриця розміру* $n \times k$ *така, що* $A^T \cdot A = 0$*. Знайти найбільший можливий ранг матриці* A*.* *(В. Б. Брайман, О. В. Руденко)*

Задача 4. *Нехай* f *— це* $2k$ *разів диференційовна, парна функція на* $\mathbb{R}$, $g(x) = f(\sqrt{x}\,), x \geqslant 0$*. Довести, що функція* g *буде* k *разів диференційовною при* $x = 0$*, та знайти зв'язок між* $g^{(k)}(0)$ *та похідними* f *в нулі.* *(О. Г. Кукуш, В. Б. Брайман)*

Задача 5. *Нехай* $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ *— дійсні симетричні матриці,* $\lambda_{\min}(A)$, $\lambda_{\min}(B)$ *— їх найменші власні значення. Довести нерівність*

$$|\lambda_{\min}(A) - \lambda_{\min}(B)| \leqslant n \cdot \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{ij} - b_{ij}|.$$

(О. В. Іванов, О. Г. Кукуш)

Задача 6. *Нехай* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *— неперервно диференційовне відображення, причому при всіх* $x \in \mathbb{R}^2$ *матриця* $Df(x) + (Df(x))^T$ *є невиродженою і* $Df(0) = E$ *(тут* $Df(x)$ *— матриця Якобі в точці* x*,* E *— одинична матриця). Чи обов'язково* f *є ін'єкцією?* *(О. Г. Кукуш)*

Задача 7. *Нехай* ξ *— випадкова величина з додатною щільністю розподілу. Чи завжди існують такі дві різні функції* $f, g \in C(\mathbb{R})$*, що* $f(\xi)$ *та* $g(\xi)$ *однаково розподілені?*

(С. Новак, Великобританія)

Задача 8. *Нехай* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *— вимірна за Лебегом функція,* λ *— міра Лебега на* $[0,1]$*. Відомо, що для будь-якої відкритої множини* $A \subset [0,1]$

$$\int\limits_A f^{2n-1}(x)\, d\lambda(x) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Довести, що $\lambda\big(\{x : \ |f(x)| \geqslant 1\}\big) = 0.$ *(В. М. Радченко)*

Задача 9. *Нехай* M *— множина всіх невироджених матриць* 3×3 *над полем* $\mathbb{Z}_2$*. Знайти таке найменше натуральне* n*, що* $A^n = E$ *при всіх* $A \in M$*.* *(А. В. Бондаренко)*

Використання калькуляторів, літератури, мобільних телефонів, ноутбуків та консультації з сусідами забороняються.