Відкрита студентська олімпіада механіко-математичного факультету

В. Б. Брайман, О. Г. Кукуш, Д. Ю. Мітін

Чергове математичне змагання студентів Київського університету було проведено 22 лютого 2007 року. Традиційно до участі були запрошені представники інших вузів, а також найкращі учні старших класів ліцеїв Києва. Як завжди, окремо змагалися студенти I–II та III–IV курсів. Про постійне зростання популярності олімпіади свідчить кількість учасників – зокрема понад 70 студентів з I–II курсів. Далі ми наводимо прізвища переможців, умови та розв'язки запропонованих задач.

Переможці олімпіади серед студентів I–II курсів.

I місце

Фещенко Іван (мех-мат ф-т КНУ, 1 курс)

II місце

Кравець Олександр (мех-мат ф-т КНУ, 2 курс)
Слободянюк Сергій (мех-мат ф-т КНУ, 2 курс)
Юрченко Іван (мех-мат ф-т КНУ, 1 курс)
Попович Дмитро (мех-мат ф-т КНУ, 2 курс)

III місце

Трегубенко Антон (ф-т кібернетики КНУ, 1 курс)
Рагель Ярослав (мех-мат ф-т КНУ, 1 курс)
Зубач Федір (НТУУ"КПІ", 2 курс)
Баранов Андрій (ф-т кібернетики КНУ, 2 курс)
Радченко Данило (ліцей "Лідер", 11 клас)
Мисак Данило (мех-мат ф-т КНУ, 2 курс)
Панфілов Іван (фізичний ф-т КНУ, 1 курс)
Лівінський Іван (мех-мат ф-т КНУ, 2 курс)
Ключніков Вадим (НТУУ"КПІ", 2 курс)
Хоменко Лариса (мех-мат ф-т КНУ, 1 курс)

Переможці олімпіади серед студентів III-IV курсів.

I місце

Журба Ярослав (мех-мат ф-т КНУ, 3 курс)

II місце

Матвійчук Микола (мех-мат ф-т КНУ, 4 курс)
Тимошкевич Тарас (мех-мат ф-т КНУ, 3 курс)

III місце

Щербіна Артем (мех-мат ф-т КНУ, 4 курс)

Завдання для 1–2 курсів

1. Нехай p, q, r, s — натуральні числа. Обчислити границю
$\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(k+p)(k+q)}{(k+r)(k+s)}$. (Р. П. Ушаков)

2. Чи при всіх $n \geqslant 2$ число $\sum\limits_{k=1}^{n} kC_{2n}^{k}$ ділиться на 8? (О. Г. Кукуш)

3. Двоє гравців по черзі заміняють зірочки в матриці $\begin{pmatrix} * & * & \dots & * \\ * & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & \dots & * \end{pmatrix}$ розміру 10×10 натуральними числами від 1 до 100 (на кожному кроці можна ставити довільне ще невикористане число замість довільної зірочки). Якщо отримана матриця виявляється невиродженою, то виграє перший гравець, а якщо виродженою, то другий. Чи має хтось із гравців виграшну стратегію? Якщо має, то хто? (В. Б. Брайман)

4. Довести, що функція $f \in C^1\big((0, +\infty)\big)$, яка задовольняє співвідношення
$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^4 + \cos f(x)},\ x > 0,$$
є обмеженою на $(0, +\infty)$. (О. Н. Нестеренко)

5. Чи існує многочлен, який при всіх $1 \leqslant k \leqslant 2007$ набуває значення k рівно в k точках? (В. Б. Брайман)

6. Циферблат годинника є кругом радіуса 1. Годинна стрілка має вигляд круга радіуса $1/2$, що дотикається внутрішнім чином до кола циферблату, а хвилинна стрілка є відрізком довжини 1. Знайти площу фігури, яку утворюють усі можливі перетини стрілок протягом півдоби (тобто за один повний оберт годинної стрілки). (Г. М. Шевченко)

7. Знайти найбільше значення виразу $x_1^3 + \ldots + x_{10}^3$ при $x_1, \ldots, x_{10} \in [-1, 2]$ та $x_1 + \ldots + x_{10} = 10$. (Д. Ю. Мітін)

8. Нехай $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ та $a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$, $n \geqslant 2$. Довести, що для всіх непарних чисел p число $a_p - 1$ ділиться на p. (О. В. Рибак)

9. Знайти всі натуральні n, для яких існує безліч матриць A розміру $n \times n$ з цілими елементами таких, що $A^n = I$, де I — одинична матриця. (А. В. Бондаренко, М. С. Вязовська)

Завдання для 3–4 курсів

1. Дослідити на збіжність невласний інтеграл Рімана $\int\limits_0^\infty \dfrac{\sin x\, dx}{x + \ln x}$. (О. Г. Кукуш)

2. Див. задачу **6** для 1-2 курсів.

3. Див. задачу **4** для 1-2 курсів.

4. Див. задачу **5** для 1-2 курсів.

5. Нехай функція $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ є вимірною за Лебегом і такою, що $\int_A f\, d\lambda < +\infty$, для будь-якої множини A з $\lambda(A) < +\infty$ (λ — міра Лебега). Довести, що існують константа M та інтегровна за Лебегом функція $g : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ такі, що $f(x) \leqslant g(x) + M$, при всіх $x \in \mathbb{R}$. (В. М. Радченко)

6. Дослідити на монотонність функцію $f(\sigma) = \mathsf{M}\dfrac{1}{1 + e^{\xi}}$, $\sigma > 0$, де ξ — гауссівська випадкова величина з середнім m та дисперсією σ^2, m — дійсний параметр. (О. Г. Кукуш)

7. Див. задачу **7** для 1-2 курсів.

8. Нехай A, B — симетричні дійсні додатно визначені матриці, причому матриця $A + B - E$ також є додатно визначеною. Чи може бути від'ємно визначеною матриця
$$A^{-1} + B^{-1} - \tfrac{1}{2}(A^{-1}B^{-1} + B^{-1}A^{-1})?$$
(О. Г. Кукуш)

9. Нехай $P(z)$ – многочлен зі старшим коефіцієнтом 1. Довести, що на одиничному колі $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ існує така точка z_0, для якої $|P(z_0)| \geqslant 1$. (О. В. Рибак)

Розв'язки та вказівки

1–2 курси

1. Маємо $\prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(k+p)(k+q)}{(k+r)(k+s)}=\dfrac{r!s!}{p!q!}\cdot\dfrac{(n+p)!}{(n+r)!}\cdot\dfrac{(n+q)!}{(n+s)!}$. Після скорочень у чисельнику та знаменнику дробу $\dfrac{(n+p)!}{(n+r)!}$ легко довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+p)!n^{r-p}}{(n+r)!}=1$ та аналогічно $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+q)!n^{s-q}}{(n+s)!}=1$. Тому $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(k+p)(k+q)}{(k+r)(k+s)}=\dfrac{r!s!}{p!q!}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}n^{p+q-r-s}$, звідки й випливає відповідь.

Відповідь: $\begin{cases} 0, & \text{якщо } p+q<r+s; \\ \dfrac{r!s!}{p!q!}, & \text{якщо } p+q=r+s; \\ +\infty, & \text{якщо } p+q>r+s. \end{cases}$

2. Оскільки $kC_{2n}^k=k\cdot\frac{(2n)!}{k!(2n-k)!}=2n\cdot\frac{(2n-1)!}{(k-1)!(2n-k)!}=2nC_{2n-1}^{k-1}$, то

$\sum\limits_{k=1}^{n}kC_{2n}^k=\sum\limits_{k=1}^{n}2nC_{2n-1}^{k-1}=n\cdot 2\sum\limits_{i=0}^{n-1}C_{2n-1}^i=n\sum\limits_{i=0}^{2n-1}C_{2n-1}^i=n2^{2n-1}$ ділиться на 8 при всіх $n\geqslant 2$.

3. Вкажемо виграшну стратегію для другого гравця. Нехай, коли перший гравець ставить число a у (i,j)-ту клітинку матриці, другий гравець ставить у відповідь число $101-a$ у $(11-i,j)$-ту клітинку (зрозуміло, що він завжди може це робити). Тоді в отриманій матриці сума 1-го та 10-го рядків дорівнює сумі 2-го та 9-го рядків, а отже матриця вироджена.

4. Покажемо, що функція f є обмеженою на $[1,+\infty)$. Справді, при всіх $x\geqslant 1$ за теоремою Ньютона-Лейбніца маємо

$$f(x)=f(1)+\int_1^x f'(t)dt\leqslant f(1)+\int_1^x\tfrac{1}{t^4}dt=f(1)+\tfrac{1}{3}\left(1-\tfrac{1}{x^3}\right)<f(1)+\tfrac{1}{3}.$$

Тому якщо f не є обмеженою на $(0,+\infty)$, то внаслідок монотонності $f(x)\to-\infty$ при $x\to 0+$. Тоді можна вибрати ціле число k так, що $\frac{\pi}{2}-2\pi k<f(1)$. За теоремою про проміжне значення існують точки $0<s<t<1$ такі, що $f(s)=-\frac{\pi}{2}-2\pi k$, $f(t)=\frac{\pi}{2}-2\pi k$. При $x\in[s,t]$ маємо $-\frac{\pi}{2}-2\pi k\leqslant f(x)\leqslant\frac{\pi}{2}-2\pi k$ та $\cos f(x)\geqslant 0$, а отже $f'(x)\leqslant 1$, $x\in[s,t]$. Але за теоремою Лагранжа існує таке $\theta\in[s,t]$, що $f'(\theta)=\frac{f(t)-f(s)}{t-s}=\frac{\pi}{t-s}>\pi>1$. Отримали протиріччя.

5. *Відповідь*: існує. Будемо шукати многочлен вигляду

$$P(x)=x^{2007}+c\prod_{j=1}^{1003}(x-2j)^2+\sum_{i=1}^{1003}(a_ix+b_i)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{1003}(x-2j)^2.$$

При кожному $1\leqslant i\leqslant 1003$ маємо

$$P(2i)=(2i)^{2007}+(a_i\cdot 2i+b_i)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{1003}(2i-2j)^2,\quad P'(2i)=2007\cdot(2i)^{2006}+a_i\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{1003}(2i-2j)^2,$$

а отже, за рахунок вибору сталих a_i та b_i можна забезпечити виконання умов

$$P(2i)=2i,\ P'(2i)=0,\ i=1,2,\ldots,1003. \tag{1}$$

Тепер за рахунок вибору сталої c можна забезпечити виконання нерівностей

$$P(1)>2007, P(3)>2007, P(2005)>2007. \tag{2}$$

З умов (1) та (2) випливає, що многочлен P степеня 2007 має 2006 точок екстремуму, а саме $x_1<2<x_2<4<\ldots<x_{1003}<2006$, та є монотонним на кожному з проміжків $(-\infty,x_1)$, $(x_1,2)$, $(2,x_2)$, $\ldots$, $(2006,+\infty)$. Враховуючи, що $P(2i)=2i, P(x_i)>2007$, $1\leqslant i\leqslant 1003$, легко перевірити, що многочлен P є шуканим.

6. Нехай хвилинна стрілка відхилилась від вертикального положення на кут $\varphi \in [0; 2\pi)$. У цей момент часу годинна стрілка відхилена від вертикального положення на один з кутів $\psi_k = \frac{\varphi + 2\pi k}{12} \pmod{2\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$. Стрілки перетинаються по відрізку довжини $\max(0, \cos(\psi_k - \varphi))$, а отже, шукана площа дорівнює $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} \rho^2(\varphi) d\varphi$, де $\rho(\varphi) = \max\bigl(0, \max\limits_k \cos(\psi_k - \varphi)\bigr)$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Зауважимо, що функція $\rho(\varphi) = \cos\left(\min\limits_k \left|\dfrac{\varphi + 2\pi k}{12} - \varphi\right|\right) = \cos\left(\min\limits_k \left|\dfrac{11\varphi}{12} - \dfrac{\pi k}{6}\right|\right)$ є періодичною з періодом $\dfrac{2\pi}{11}$, і при $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{11}, \frac{\pi}{11}\right]$ маємо $\rho(\varphi) = \cos\left(\frac{11\varphi}{12}\right)$. Отже, площа фігури, утвореної перетинами стрілок, дорівнює

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho^2(\varphi) d\varphi = \frac{11}{2}\int_{-\frac{\pi}{11}}^{\frac{\pi}{11}} \rho^2(\varphi) d\varphi = \frac{11}{2}\int_{-\frac{\pi}{11}}^{\frac{\pi}{11}} \cos^2\Bigl(\frac{11\varphi}{12}\Bigr) d\varphi =$$
$$= \frac{11}{4}\int_{-\frac{\pi}{11}}^{\frac{\pi}{11}} \left(1 + \cos\Bigl(\frac{11\varphi}{6}\Bigr)\right) d\varphi = \left(\frac{11\varphi}{4} + \frac{3\sin\left(\frac{11\varphi}{6}\right)}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{11}}^{\frac{\pi}{11}} = \frac{\pi + 3}{2}.$$

7. *Відповідь:* $47,5$. Подивимось, як змінюється значення виразу $x_1^3 + x_2^3$ при *зсуві* змінних $x_1 \leqslant x_2$, тобто їх заміні на $x_1 + \varepsilon$ та $x_2 - \varepsilon$, $0 < \varepsilon \leqslant \frac{x_2 - x_1}{2}$, та при їх *розсуві*, тобто заміні на $x_1 - \varepsilon$ та $x_2 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. При зсуві змінних добуток $x_1 x_2$ не спадає, а при їх розсуві — не зростає. Тому сума кубів двох змінних $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2)$ не спадає при розсуві двох змінних, якщо $x_1 + x_2 \geqslant 0$, а при зсуві, якщо $x_1 + x_2 \leqslant 0$.

Будемо розсувати пари змінних x_i, x_j, в яких $x_i + x_j \geqslant 0$, доки одна зі змінних пари не потрапить в один з кінців відрізка $[-1; 2]$. Це можна робити доти, доки на інтервалі $(-1; 2)$ будуть залишатися пари змінних з невід'ємною сумою. Після цього отримаємо одну з двох ситуацій:
1) частина змінних потрапила у 2 та -1, а решта, що, можливо, залишилися на інтервалі, мають від'ємні попарні суми (а також кожна зі змінних на інтервалі має від'ємну суму й з -1);
2) частина змінних потрапила у 2 та -1, а єдина змінна, що, можливо, залишилася на інтервалі, має невід'ємну суму з -1.

У першому випадку будемо зсувати описаним вище чином пари змінних на проміжку $[-1; 2)$, доки одна з них не потрапить у середнє арифметичне змінних на $[-1; 2)$. Будемо так робити, доки всі змінні з $[-1; 2)$ не зберуться у їхньому середньому арифметичному (яке є від'ємним через від'ємність попарних сум).

Отже, починаючи з довільного набору точок, ми можемо, не змінюючи їхню суму та не зменшуючи їхню суму кубів, перейти за допомогою описаних зсувів та розсувів до одного з двох типів наборів:
1) k змінних зосереджені у точці $x \in [-1; 0]$, а $10 - k$ змінних — у точці 2 ($k = 0, \ldots, 10$);
2) k змінних зосереджені у точці -1, одна змінна — у точці $x \in [1; 2]$ та $9 - k$ змінних — у точці 2 ($k = 0, \ldots, 9$).

З умов $x_1 + \ldots + x_{10} = 10$ та $x \in [-1; 0]$ (або $x \in [1; 2]$) отримуємо, що $k = 4$ чи 5 для наборів першого типу або $k = 3$ для наборів другого типу. Залишилось перебрати набори: $(-1/2, -1/2, -1/2, -1/2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$, $(0, 0, 0, 0, 0, 2, 2, 2, 2, 2)$, $(-1, -1, -1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$. Найбільше значення суми кубів $47,5$ досягається на першому з них.

8. Покажемо, що a_n дорівнює кількості b_n перестановок n елементів, що складаються лише з циклів довжини 1 та 2. При $n \geqslant 3$ або n-й елемент перестановки є нерухомим, і тоді задати перестановку на інших елементах можна b_{n-1} способами, або він утворює цикл довжини 2 з деяким з $n - 1$ інших елементів, і тоді задати перестановку на інших елементах можна b_{n-2} способами. Тому $b_n = b_{n-1} + (n-1) b_{n-2}$, $n \geqslant 2$, та з рівностей $a_1 = b_1 = 1$, $a_2 = b_2 = 2$

випливає, що $a_n = b_n$ при всіх $n \geqslant 1$. Зафіксуємо довільне непарне число p і перевіримо, що $a_p - 1 = b_p - 1$ ділиться на p, або, що те саме, на p ділиться кількість перестановок з циклами довжини 1 та 2, що містять *принаймні один* цикл довжини 2. Для цього покажемо, що при кожному $1 \leqslant k \leqslant \frac{p-1}{2}$ на p ділиться кількість перестановок, що містять *рівно* k циклів довжини 2. Для того, щоб задати таку перестановку, слід вибрати $2k$ елементів, які увійдуть до циклів довжини 2, та розбити їх на пари, причому порядок пар та елементів у парах не важливі. Тому кількість перестановок з k циклами довжини 2 дорівнює $C_p^{2k} \cdot \dfrac{(2k)!}{2^k \cdot k!} = \dfrac{p}{2^k} \cdot C_{p-k}^k \cdot \dfrac{(p-1)!}{(p-k)!}$, а отже, ділиться на p, бо число p непарне.

9. *Відповідь*: $n \geqslant 2$. Для кожного цілого числа k розглянемо матриці розміру $n \times n$ вигляду $A_k = B_k C B_{-k}$, де $B_k = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ — матриця-перестановка. Тоді матриця A_k має цілі коефіцієнти та оскільки $B_{-k} = B_k^{-1}$ та $C^n = I$, то

$$A_k^n = (B_k C B_{-k})^n = (B_k C B_k^{-1})^n = B_k C^n B_k^{-1} = B_k B_k^{-1} = I.$$

Залишилось зауважити, що $A_k = \begin{pmatrix} k & 1-k^2 \\ 1 & -k \end{pmatrix}$ при $n = 2$ та $A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & -k & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ при $n \geqslant 3$, тобто всі матриці A_k, що відповідають різним значенням k, є різними.

3–4 курси

1. Розглянемо неперервну на $(0,1]$ функцію $f(x) = x + \ln x$. Оскільки $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = -\infty$ та $f(1) = 1$, то за теоремою про проміжне значення існує таке $a \in (0,1)$, що $f(a) = 0$. Зрозуміло, що $\sin a \neq 0$, $f'(a) = 1 + \frac{1}{a} \neq 0$, а отже при $x \to a$ маємо $\dfrac{\sin x}{x + \ln x} \sim \dfrac{\sin a}{(x-a) f'(a)}$. Оскільки інтеграл $\int_a^1 \frac{dx}{x-a}$ розбіжний, то і вихідний інтеграл розбігається.

2. Див. задачу **6** для 1-2 курсів.

3. Див. задачу **4** для 1-2 курсів.

4. Див. задачу **5** для 1-2 курсів.

5. Покладемо $B_N = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geqslant N\}$, $N \geqslant 0$. Покажемо, що існує таке M, що $\lambda(B_M) < \infty$. Справді, якщо це не так, то існує множина $A_0 \subset B_1$, $\lambda(A_0) = 1$, та при $n \geqslant 1$ можна послідовно вибрати множини A_n такі, що $A_n \subset B_{2^n} \setminus \left(\bigcup\limits_{i=0}^{n-1} A_i \right)$ та $\lambda(A_n) = \frac{1}{2^n}$. Покладемо $A = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n$. Тоді $\lambda(A) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda(A_n) = 2$, але внаслідок вибору множин A_n маємо

$$\int\limits_A f(x)\, d\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{A_n} f(x)\, d\lambda(x) \geqslant \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \lambda(A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot \tfrac{1}{2^n} = +\infty,$$

суперечність з умовою задачі. Перевіримо, що стала M, для якої $\lambda(B_M) < +\infty$, та функція $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in B_M, \\ 0, & x \notin B_M \end{cases}$ задовольняють умову. Справді, за побудовою $f(x) \leqslant g(x) + M$, $x \in \mathbb{R}$, та g є інтегровною, бо $\int\limits_{\mathbb{R}} g\, d\lambda = \int\limits_{B_M} f\, d\lambda < +\infty$.

6. Зауважимо, що ξ можна подати у вигляді $\xi = m + \sigma\zeta$, де $\zeta \sim N(0;1)$ — стандартна гауссівська випадкова величина. Тому

$$f(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{-x^2/2}}{1 + e^{m+\sigma x}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{\infty} p(x,\sigma) e^{-x^2/2} dx, \quad \text{де} \quad p(x,\sigma) = \frac{1}{1 + e^{m+\sigma x}} + \frac{1}{1 + e^{m-\sigma x}}.$$

Зафіксуємо довільне $x > 0$ та дослідимо на монотонність $p(x, \sigma)$ як функцію від σ. Маємо

$$p'_\sigma(x,\sigma) = -\frac{xe^{m+\sigma x}}{(1+e^{m+\sigma x})^2} + \frac{xe^{m-\sigma x}}{(1+e^{m-\sigma x})^2} = -\frac{xe^{m+\sigma x}}{(1+e^{m+\sigma x})^2} + \frac{xe^{m+\sigma x}}{(e^{\sigma x}+e^m)^2} =$$
$$= xe^{m+\sigma x}\cdot\frac{-(e^{\sigma x}+e^m)^2+(1+e^{m+\sigma x})^2}{(1+e^{m+\sigma x})^2(e^{\sigma x}+e^m)^2} = \frac{xe^{m+\sigma x}(e^{2\sigma x}-1)(e^m-1)}{(1+e^{m+\sigma x})^2(e^{\sigma x}+e^m)^2}.$$

Отже, знак $p'_\sigma(x,\sigma)$ при всіх $x > 0$ співпадає зі знаком виразу $e^m - 1$. Тому маємо

$$f'(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\infty p'_\sigma(x,\sigma)e^{-x^2/2}dx \begin{cases} < 0, & \text{якщо } m > 0; \\ = 0, & \text{якщо } m = 0; \\ > 0, & \text{якщо } m > 0. \end{cases}$$

Відповідь: f спадає, якщо $m < 0$, f є сталою, якщо $m = 0$, та f зростає, якщо $m > 0$.
7. Див. задачу **7** для 1-2 курсів.
8. Покладемо $C = A + B - E$, $D = A^{-1} + B^{-1} - \frac{1}{2}(A^{-1}B^{-1} + B^{-1}A^{-1}) = \frac{1}{2}\big(A^{-1}CB^{-1} + B^{-1}CA^{-1}\big)$. Тоді для довільного вектора x маємо

$$(Dx,x) = \frac{1}{2}\big((A^{-1}CB^{-1}x,x) + (B^{-1}CA^{-1}x,x)\big) = \frac{1}{2}\big((CB^{-1}x,A^{-1}x) + (A^{-1}x,CB^{-1}x)\big) =$$
$$= (CB^{-1}x,A^{-1}x).$$

Зауважимо, що матриці $AB^{-1} = AB^{-1/2}\cdot B^{-1/2}$ та $B^{-1/2}AB^{-1/2}$ мають однакові власні числа, причому матриця $B^{-1/2}AB^{-1/2}$ є додатно визначеною. Тому всі власні числа матриці AB^{-1} є додатними. Нехай $x \neq 0$ — власний вектор матриці AB^{-1}, що відповідає власному числу $\lambda > 0$. Тоді $B^{-1}x = \lambda A^{-1}x$ та $(Dx,x) = \lambda(CA^{-1}x, A^{-1}x) > 0$, тобто матриця D не є від'ємно визначеною.
Зауваження. Нехай $A = \left(\begin{smallmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{smallmatrix}\right), B = \left(\begin{smallmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{smallmatrix}\right)$. Тоді матриця $C = \left(\begin{smallmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{smallmatrix}\right)$ є додатно визначеною, але матриця $D = \left(\begin{smallmatrix}-3 & 8\\ 8 & -3\end{smallmatrix}\right)$ має власні числа різних знаків. Таким чином, в умовах задачі матриця D не обов'язково є додатно визначеною.
9. Нехай $\deg P = n$. Припустимо, що $\max\limits_{\{|z|=1\}}|P(z)| < 1$. Тоді при $|z| = 1$ маємо $|P(z)| < |z^n|$, і за теоремою Руше многочлени z^n та $z^n - P(z)$ мають однакову кількість коренів з урахуванням кратності в області $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Але многочлен z^n має n коренів в зазначеній області, а многочлен $z^n - P(z)$ — щонайбільше $n-1$, суперечність.