Відкрита студентська олімпіада механіко-математичного факультету

В.Б. Брайман, О.Н. Нестеренко

Чергове математичне змагання студентів Київського національного університету імені Тараса Шевченка було проведено 3 березня 2016 року. Олімпіада проходила окремо для студентів 1–2 та 3–4 курсів. В олімпіаді взяли участь студенти механіко-математичного факультету та факультету кібернетики КНУ, декількох факультетів НТУУ "КПІ", а також учні провідних математичних шкіл Києва. Нижче ми наводимо прізвища переможців, умови та розв'язання запропонованих задач.

Переможці олімпіади серед студентів 1–2 курсів

I місце

Хотяїнцева Наталія Володимирівна (ф-т кібернетики КНУ, 1 курс)

II місце

Альохіна Анастасія Олексіївна (ф-т кібернетики КНУ, 1 курс)
Манікін Борис Ігорович (мех-мат ф-т КНУ, 1 курс)

III місце

Яковлєв Іван Володимирович (ф-т кібернетики КНУ, 1 курс)
Корчемна Вікторія Сергіївна (мех-мат ф-т КНУ, 1 курс)
Кучеренко Анастасія Олегівна (ф-т кібернетики КНУ, 1 курс)
Митрофанов Вадим Євгенович (мех-мат ф-т КНУ, 2 курс)
Шуліков Арсеній Владиславович (ІПСА, НТУУ "КПІ", 1 курс)

Заохочувальна відзнака

Коляденко Павло Павлович (ф-т кібернетики КНУ, 1 курс)

Переможці олімпіади серед студентів 3–4 курсів

I місце

Ківва Богдан Сергійович (мех-мат ф-т КНУ, 4 курс)

II місце

Шатохін Михайло Вікторович (мех-мат ф-т КНУ, 3 курс)

III місце

Бахчеджиоглу Атілла Алперович (мех-мат ф-т КНУ, 3 курс)
Вовченко Владислав Олегович (мех-мат ф-т КНУ, 3 курс)
Дашков Олександр Олександрович (мех-мат ф-т КНУ, 3 курс)
Соскін Даніел Станіславович (мех-мат ф-т КНУ, 4 курс)
Хілько Данило Ігорович (мех-мат ф-т КНУ, 3 курс)
Щеглов Микита Владиславович (мех-мат ф-т КНУ, 3 курс)

Заохочувальна відзнака

Руденко Олександр Вячеславович (мех-мат ф-т КНУ, 4 курс)
Горецький Микола Андрійович (мех-мат ф-т КНУ, 3 курс)
Колінько Микола Миколайович (мех-мат ф-т КНУ, 3 курс)

Завдання для 1–2 курсів

1. Знайти найменше можливе значення виразу $4\cos^2\frac{n\pi}{9}+\sqrt[3]{7-12\cos^2\frac{n\pi}{9}}$, де $n\in\mathbb{Z}$.
(В.Г. Юрашев)

2. Кажуть, що підмножина натуральних чисел $\{a_1<a_2<\ldots<a_n<\ldots\}$ має щільність α, якщо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\max\{k : a_k\le n\}}{n}=\alpha.$$

Чи існує підмножина натуральних чисел зі щільністю 1, яка не містить жодної нескінченної зростаючої геометричної прогресії? *(Д.І. Хілько)*

3. Нехай ABC — рівнобедрений прямокутний трикутник в $\mathbb{R}^3$, $A_1B_1C_1$ — його ортогональна проекція на деяку площину. Відомо, що $A_1B_1C_1$ теж рівнобедрений прямокутний трикутник. Знайти всі можливі відношення довжини катета AB до довжини катета A_1B_1. *(В.Б. Брайман)*

4. Послідовність задана рекурентно:

$$x_0=1,\quad x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^2}{2016},\ n\ge 0.$$

Довести, що $x_{2016}<\frac{1}{2}<x_{2015}$. *(Д.В. Ткаченко)*

5. Нехай A,B — дійсні матриці а) розміру 2016×2016; б) розміру 2017×2017. Чи обов'язково існують такі дійсні числа a,b, що $a^2+b^2\ne 0$ та матриця $aA+bB$ вироджена?
(А.В. Бондаренко)

6. Про натуральні числа x, m та n відомо, що x ділиться на 7 та $\sqrt{x}>\dfrac{m}{n}$. Довести, що $\sqrt{x}>\dfrac{m^4+2m^2+2}{m^3n+mn}$. *(В.Г. Юрашев)*

7. Нехай $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$, $\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}$ — два набори попарно різних дійсних чисел, $a_{ij}=x_i+y_j$, $1\le i,j\le n$. Відомо, що добуток елементів кожного стовпчика матриці $A=(a_{ij})$ дорівнює c. Знайти всі можливі значення добутку елементів рядка матриці A.
(Д.В. Ткаченко)

Завдання для 3–4 курсів

1. На гранях кубика, який падає на кожне ребро зі ймовірністю $1/12$, написані деякі числа. Чи може сума чисел, які випадають на двох верхніх гранях, набувати значення $1,2,\ldots,6$ зі ймовірністю $1/6$? *(В.Б. Брайман)*

2. Нехай $f\in C^{(1)}([0,1])$, λ_1 — міра Лебега на $\mathbb{R}$. Довести, що

$$\lambda_1\big(\{x\in[0,1] : f(x)=0\}\big)=\lambda_1\big(\{x\in[0,1] : f(x)=f'(x)=0\}\big).$$

(О.В. Руденко)

3. Див. задачу **5** для 1–2 курсів.

4. Нехай $\{A(t),\ t\in\mathbb{R}\}$ — неперервна сім'я дійсних кососиметричних матриць розміру $n\times n$, E — одинична матриця розміру $n\times n$, $X(t)$ — розв'язок матричного диференціального рівняння $\frac{dX(t)}{dt}=A(t)X(t)$ з початковою умовою $X(0)=E$. Довести, що для довільної точки $y \in \mathbb{R}^n$ існують точка $z \in \mathbb{R}^n$ та послідовність $\{t_i,\ i \ge 1\} \subset \mathbb{R}$ такі, що $t_i \to +\infty$ та $X(t_i)z \to y$ при $i \to \infty$. *(І.О. Парасюк)*

5. Нехай

$$p(x,a,b) = \begin{cases} \exp\bigl(ax + bx^2 + f(a,b) + g(x)\bigr), & x \in [0;1], \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [0;1], \end{cases}$$

— сім'я щільностей імовірності з параметрами $a, b \in \mathbb{R}$, $g \in C(\mathbb{R})$. Довести, що

$$\bigl(f'_a(a,b)\bigr)^2 + f'_b(a,b) < 0, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

(О.Г. Кукуш)

6. Нехай $K : [0,1] \to [0,1]$ — функція Кантора, тобто неспадна функція така, що $K\left(\sum\limits_{i\in S} \frac{2}{3^i}\right) = \sum\limits_{i\in S} \frac{1}{2^i}$ для всіх множин $S \subset \mathbb{N}$. Знайдіть

$$\lim_{n\to\infty} n \int_{[0,1]} K^n(x)\, d\lambda_1.$$

(В.М. Радченко)

7. Нехай A — дійсна матриця розміру $m \times n$, $m < n$, причому $\operatorname{rk} A = m$, а E — одинична матриця розміру $m \times m$. Побудувати дійсну матрицю X розміру $n \times m$, для якої $AX = E$, з найменшою можливою сумою квадратів елементів. *(О.Г. Кукуш)*

Розв'язання задач

Завдання для 1–2 курсів

1. Якщо n ділиться на 9, то $\cos\frac{n\pi}{9} = \pm 1$ та значення виразу дорівнює $4 - \sqrt[3]{5}$. Якщо n ділиться на 3 та не ділиться на 9, то $\cos\frac{n\pi}{9} = \pm\frac{1}{2}$ та значення виразу дорівнює $1 + \sqrt[3]{4}$.

Нехай n не ділиться на 3. Після пониження степеня дістаємо, що вираз дорівнює

$$2 + 2\cos\tfrac{2n\pi}{9} + \sqrt[3]{1 - 6\cos\tfrac{2n\pi}{9}}.$$

Оскільки $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$, то при $\alpha = \frac{2n\pi}{9}$ маємо

$$4\cos^3\tfrac{2n\pi}{9} = \cos\tfrac{6n\pi}{9} + 3\cos\tfrac{2n\pi}{9} = -\tfrac{1}{2} + 3\cos\tfrac{2n\pi}{9},$$

звідки

$$2 + 2\cos\tfrac{2n\pi}{9} + \sqrt[3]{1 - 6\cos\tfrac{2n\pi}{9}} = 2 + 2\cos\tfrac{2n\pi}{9} + \sqrt[3]{-8\cos^3\tfrac{2n\pi}{9}} = 2.$$

Залишається зауважити, що $4 - \sqrt[3]{5} > 2$ та $1 + \sqrt[3]{4} > 2$.

Відповідь: 2.

2. *І спосіб.* Кожна нескінченна зростаюча геометрична прогресія, яка складається з натуральних чисел, має натуральні перший член та знаменник. Тому таких прогресій зліченна кількість. Занумеруємо всі прогресії та виберемо з n-ої прогресії число

$c_n > 10^n$. Розглянемо множину $A = \mathbb{N} \setminus \{c_1, c_2, \ldots\} = \{a_1, a_2, \ldots\}$. Ця множина не містить жодної нескінченної зростаючої геометричної прогресії та

$$\frac{\max\{k : a_k \le n\}}{n} \ge \frac{n - [\lg n]}{n} \to 1,\ n \to \infty.$$

II спосіб. Нехай $B = \{bq^{b+1},\ b, q \in \mathbb{N}, q \ge 2\}$ та $A = \mathbb{N} \setminus B = \{a_1, a_2, \ldots\}$. Кожна нескінченна зростаюча геометрична прогресія, яка складається з натуральних чисел, має натуральний перший член b та натуральний знаменник $q \ge 2$, а отже містить число bq^{b+1}. Тому множина A не містить жодної нескінченної зростаючої геометричної прогресії. Оцінимо кількість елементів множини B, які не перевищують натуральне число n. Якщо $bq^{b+1} \le n$, то $2^b < bq^{b+1} \le n$, звідки $b < \log_2 n$, та $q^2 \le bq^{b+1} \le n$, звідки $q \le \sqrt{n}$. Тому множина B містить менше за $\sqrt{n}\,\log_2 n$ чисел, а множина A — більше за $n - \sqrt{n}\,\log_2 n$ чисел, які не перевищують n. Звідси

$$\frac{\max\{k : a_k \le n\}}{n} > \frac{n - \sqrt{n}\,\log_2 n}{n} \to 1,\ n \to \infty.$$

Відповідь: існує.

3. Без обмеження загальності $\angle B_1A_1C_1 = 90^\circ$ та $\angle BAC = 90^\circ$ або $\angle ABC = 90^\circ$. Розглянемо декартову систему координат, в якій $\overrightarrow{A_1B_1} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{A_1C_1} = (0, 1, 0)$. Тоді при деяких $x, y \in \mathbb{R}$ маємо $\overrightarrow{AB} = (1, 0, x)$, $\overrightarrow{AC} = (0, 1, y)$ та $\overrightarrow{BC} = (-1, 1, y - x)$.

Якщо $\angle BAC = 90^\circ$, то трикутник ABC є рівнобедреним прямокутним за умови, що $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right|$ та $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 0$, тобто $1 + x^2 = 1 + y^2$ та $xy = 0$. Звідси $x = y = 0$ та $AB = A_1B_1$.

Якщо $\angle ABC = 90^\circ$, то трикутник ABC є рівнобедреним прямокутним за умови, що $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|$ та $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) = 0$, тобто

$$\begin{cases} 1 + x^2 = 2 + (y - x)^2, \\ -1 + x(y - x) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y^2 - 2xy = -1, \\ xy - x^2 = 1. \end{cases}$$

Оскільки $x \ne 0$ та $y^2 - xy - x^2 = 0$, то $(y/x)^2 - y/x - 1 = 0$. Звідси $y = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{5}\right) x$. Покладемо $\varphi = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right)$. При $y = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{5}\right) x$ система не має розв'язків, а при $y = \varphi x$ неважко знайти розв'язки системи $x = \sqrt{\varphi}$, $y = \varphi\sqrt{\varphi}$ та $x = -\sqrt{\varphi}$, $y = -\varphi\sqrt{\varphi}$. Отже, $AB = \sqrt{1 + x^2} = \sqrt{1 + \varphi} = \varphi = \varphi A_1B_1$.

Відповідь: 1, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

4. Покладемо $y_n = \frac{1}{x_n}$. Тоді $y_0 = 1$, а при $n \ge 0$ маємо

$$\frac{1}{y_{n+1}} = \frac{1}{y_n} - \frac{1}{2016y_n^2}, \quad \text{або} \quad y_{n+1} = \frac{2016y_n^2}{2016y_n - 1}, \quad \text{звідки} \quad y_{n+1} - y_n = \frac{1}{2016 - \frac{1}{y_n}}.$$

Зрозуміло, що $x_n \in (0, 1)$ при всіх $n \ge 1$. Тому $y_n > 1$ при всіх $n \ge 1$. Отже,

$$y_1 - y_0 = \frac{1}{2015} \quad \text{та} \quad \frac{1}{2016} < y_{n+1} - y_n = \frac{y_n}{2016y_n - 1} < \frac{1}{2015},\ n \ge 1.$$

Звідси індукцією за n дістаємо, що

$$1 + \frac{n}{2016} < y_n < 1 + \frac{n}{2015}, \ n \geq 2.$$

Тому $y_{2015} < 2 < y_{2016}$, тобто $x_{2016} < \frac{1}{2} < x_{2015}$.

5. а) Нехай A — одинична матриця, а B — блочно-діагональна матриця, на діагоналі якої стоять 1008 блоків вигляду $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Тоді $aA+bB$ — блочно-діагональна матриця, на діагоналі якої стоять 1008 блоків вигляду $\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$. Отже, $\det(aA+bB) = (a^2+b^2)^{1008} \neq 0$ при $a^2 + b^2 \neq 0$.

б) Якщо деяка з матриць A або B вироджена, то можна покласти відповідно $a = 1$, $b = 0$ або $a = 0$, $b = 1$. Нехай матриці A та B невироджені. Оскільки $\det(-A) = (-1)^{2017} \det A = -\det A$, то існує $\alpha \in \{-1; 1\}$, при якому $\det(\alpha A) > 0$. Аналогічно існує $\beta \in \{-1; 1\}$, при якому $\det(\beta B) < 0$. Тоді функція $f(t) = \det\bigl(t\alpha A + (1-t)\beta B\bigr)$, $t \in \mathbb{R}$ є неперервною, $f(0) = \det(\beta B) < 0$ та $f(1) = \det(\alpha A) > 0$. Отже, за теоремою про проміжне значення існує $0 < t_0 < 1$, при якому $f(t_0) = 0$, та можна покласти $a = t_0\alpha$, $b = (1-t_0)\beta$.

Відповідь: а) ні; б) так.

6. Доведемо, що

$$\sqrt{x} > \frac{m}{n} + \frac{1}{mn} = \frac{m^2+1}{mn}.$$

Оскільки $\sqrt{x} > \dfrac{m}{n}$, то $n^2x > m^2$. Але $n^2x \neq m^2+1$ та $n^2x \neq m^2+2$, оскільки числа m^2+1 та m^2+2 не діляться на 7 при жодному цілому m. Отже, $n^2x \geq m^2+3$. Припустимо, що $\sqrt{x} \leq \dfrac{m^2+1}{mn}$. Тоді $m^2n^2x \leq (m^2+1)^2 = m^4+2m^2+1$, а отже $m^4+2m^2+1 \geq m^2(m^2+3) = m^4+3m^2$, тобто $1 \geq m^2$, звідки $m = 1$. Але тоді $n^2x \leq 4$ та x не може ділитися на 7, суперечність.

Отже, якщо $\sqrt{x} > \dfrac{m}{n}$, то $\sqrt{x} > \dfrac{m}{n} + \dfrac{1}{mn} = \dfrac{m^2+1}{mn}$. Звідси випливає, що

$$\sqrt{x} > \frac{m^2+1}{mn} + \frac{1}{(m^2+1)mn} = \frac{m^4+2m^2+2}{m^3n+mn}.$$

7. Нехай $P(y) = (x_1+y)(x_2+y)\ldots(x_n+y) - c$. Тоді $P(y_1) = P(y_2) = \ldots = P(y_n) = 0$, причому P — многочлен степеня n зі старшим коефіцієнтом 1. Тому

$$P(y) = (y-y_1)(y-y_2)\ldots(y-y_n) = (x_1+y)(x_2+y)\ldots(x_n+y) - c.$$

Звідси

$$\begin{gathered} P(-y) = (x_1-y)(x_2-y)\ldots(x_n-y) - c = (-y-y_1)(-y-y_2)\ldots(-y-y_n), \\ (y+y_1)(y+y_2)\ldots(y+y_n) = (y-x_1)(y-x_2)\ldots(y-x_n) - (-1)^n c. \end{gathered}$$

При $y = x_i$ дістаємо, що $(x_i+y_1)(x_i+y_2)\ldots(x_i+y_n) = (-1)^{n+1}c$.

Відповідь: $(-1)^{n+1}c$.

Завдання для 3–4 курсів

1. Нехай на протилежних гранях кубика записано числа a_1 та a_2, b_1 та b_2, c_1 та c_2. Якщо кубик задовольняє умову задачі, то сума чисел, записаних на будь-яких сусідніх гранях, є цілою. Сума всіх записаних чисел дорівнює $S = (a_1+b_1)+(b_2+c_1)+(c_2+a_2)$, отже ця сума є цілою. Але математичне сподівання суми чисел, які випадають на двох верхніх гранях, дорівнює $\frac{S}{3}$. Тому має виконуватися рівність $\frac{S}{3} = \frac{21}{6}$, тобто $S = 10{,}5$ не є цілим, суперечність.

Відповідь: ні.

2. Множини $A = \{x \in [0,1] : f(x) = 0\}$ та $B = \{x \in [0,1] : f(x) = f'(x) = 0\}$ замкнені, а отже борелеві. Зрозуміло, що $B \subset A$. Покажемо, що всі граничні точки множини A належать множині B. Справді, нехай $\{x_n,\ n \geq 1\} \subset A \setminus \{x\}$ та $x_n \to x$, $n \to \infty$. Тоді $x \in A$, оскільки множина A замкнена. Отже, $f(x_n) = 0$, $n \geq 1$, та $f(x) = 0$, звідки $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(x)}{x_n - x} = 0$, тобто $x \in B$. Таким чином, множина $A \setminus B$ містить лише ізольовані точки множини A. Тому ця множина не більше ніж зліченна, оскільки при кожному $n \geq 1$ існує щонайбільше скінченна кількість точок множини A, в $\frac{1}{n}$-околі яких немає інших точок множини A. Отже, $\lambda_1(A \setminus B) = 0$ та $\lambda_1(A) = \lambda_1(B) + \lambda_1(A \setminus B) = \lambda_1(B)$.

4. Оскільки матриці $A(t)$ кососиметричні, тобто $A(t)^{\mathrm{T}} = -A(t)$, $t \in \mathbb{R}$, то

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n\ \forall\, t \in \mathbb{R} \quad \frac{d}{dt}\big(X(t)x, X(t)x\big) = \big(A(t)X(t)x, X(t)x\big) + \big(X(t)x, A(t)X(t)x\big) = \\ = \big(A(t)X(t)x, X(t)x\big) + \big(A(t)^{\mathrm{T}}X(t)x, X(t)x\big) = 0,$$

звідки $\|X(t)x\|^2 = \big(X(t)x, X(t)x\big) = (x,x) = \|x\|^2$, тобто $X(t) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — ізометрія. Як наслідок, $X(t) : S_r(0) \to S_r(0)$ — бієкція для кожного $t \in \mathbb{R}$ і кожного $r > 0$ (тут $S_r(0)$ — сфера в $\mathbb{R}^n$ з центром у точці 0 та радіусом r).

Розглянемо послідовність точок $y_t = X(t)^{-1}y$, $t \in \mathbb{N}$. Оскільки $\{y_t,\ t \geq 1\} \subset S_r(0)$, де $r = \|y\|$, та $S_r(0)$ — компактна множина, то існує підпослідовність $\{y_{t_i},\ i \geq 1\}$, яка збігається до деякого $z \in S_r(0)$. Тоді

$$\|X(t_i)z - y\| = \|X(t_i)z - X(t_i)X(t_i)^{-1}y\| = \|z - y_{t_i}\| \to 0,\ i \to \infty.$$

5. При всіх $a, b \in \mathbb{R}$ маємо

$$\int_0^1 p(x,a,b)dx = \exp(f(a,b)) \cdot \int_0^1 \exp\big(ax + bx^2 + g(x)\big)dx = 1$$

(тут і далі всі інтеграли є інтегралами Рімана). Звідси

$$f(a,b) = -\ln\left(\int_0^1 \exp\big(ax + bx^2 + g(x)\big)dx\right),$$

тому $f \in C^{(1)}(\mathbb{R}^2)$. Продиференціюємо тотожність $\int_0^1 p(x,a,b)dx = 1$ по a та по b. Дістанемо

$$\int_0^1 \big(x + f'_a(a,b)\big)p(x,a,b)dx = 0, \quad \int_0^1 \big(x^2 + f'_b(a,b)\big)p(x,a,b)dx = 0.$$

Нехай $\xi = \xi(a,b)$ — випадкова величина зі щільністю $p(x,a,b)$. Тоді

$$\mathsf{M}\xi = \int_0^1 xp(x,a,b)dx = -\int_0^1 f'_a(a,b)p(x,a,b)dx = -f'_a(a,b),$$
$$\mathsf{M}\xi^2 = \int_0^1 x^2p(x,a,b)dx = -\int_0^1 f'_b(a,b)p(x,a,b)dx = -f'_b(a,b),$$

звідки $\mathsf{D}\xi = \mathsf{M}\xi^2 - (\mathsf{M}\xi)^2 = -f'_b(a,b) - (-f'_a(a,b))^2 > 0$, тобто $(f'_a(a,b))^2 + f'_b(a,b) < 0$ (ми використали, що $D\xi > 0$, оскільки при $D\xi = 0$ випадкова величина ξ не має щільності).

6. *I спосіб.* Покажемо, що границя дорівнює нулю. Оскільки $K\Big(1-\frac{1}{3^k}\Big) = 1 - \frac{1}{2^k}$, то

$$K(x) \le 1 - \frac{1}{2^k} \text{ при } 1 - \frac{1}{3^{k-1}} \le x \le 1 - \frac{1}{3^k}, \quad k \ge 1.$$

Тому

$$I_n := n\int_{[0,1]} K^n(x)\,d\lambda_1 \le \sum_{k\ge1} n\Big(1-\frac{1}{2^k}\Big)^n\frac{2}{3^k}.$$

При фіксованому k для послідовності $a_n = n\Big(1-\frac{1}{2^k}\Big)^n$, $n \ge 1$, маємо

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n}\Big(1-\frac{1}{2^k}\Big) \ge 1 \;\Leftrightarrow\; n \le 2^k - 1,$$

тому ця послідовність зростає при $n \le 2^k - 1$ та спадає при $n \ge 2^k$, а отже $a_n \le a_{2^k} < 2^k$ при всіх $n \in \mathbb{N}$.

Тепер маємо, що для будь-якого k_0

$$I_n \le \sum_{1\le k\le k_0} n\Big(1-\frac{1}{2^k}\Big)^n\frac{2}{3^k} + \sum_{k>k_0} n\Big(1-\frac{1}{2^k}\Big)^n\frac{2}{3^k} < \sum_{1\le k\le k_0} n\Big(1-\frac{1}{2^k}\Big)^n\frac{2}{3^k} + \sum_{k>k_0}\frac{2^{k+1}}{3^k}.$$

Для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна вибрати k_0 так, аби друга сума була меншою за $\varepsilon/2$. Оскільки при кожному фіксованому k маємо $n\Big(1-\dfrac{1}{2^k}\Big)^n \to 0$, $n\to\infty$, то для даного k_0 та всіх достатньо великих n перша сума теж буде меншою за $\varepsilon/2$.

II спосіб. Для кожного $j \in \mathbb{N}$ покладемо

$$K_j(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{2^j}, & 0 \le x \le 1 - \dfrac{2}{3^j}, \\ 1 + \dfrac{3^j}{2^{j+1}}(x-1), & 1 - \dfrac{2}{3^j} \le x \le 1. \end{cases}$$

Неважко перевірити, що $K(x) \le K_j(x), x \in [0,1]$, та

$$n\int_{[0,1]} K_j^n(x)\,d\lambda_1 = n\Big(1-\frac{2}{3^j}\Big)\Big(1-\frac{1}{2^j}\Big)^n + \frac{n}{n+1}\frac{2^{j+1}}{3^j}\Big(1-\Big(1-\frac{1}{2^j}\Big)^{n+1}\Big) \to \frac{2^{j+1}}{3^j},\; n\to\infty.$$

Таким чином,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n \int_{[0,1]} K^n(x)\, d\lambda_1 \le \lim_{n\to\infty} n \int_{[0,1]} K_j^n(x)\, d\lambda_1 = \frac{2^{j+1}}{3^j}.$$

Оскільки $j \ge 1$ довільне, звідси дістаємо відповідь.

Відповідь: 0.

7. Знайдемо матрицю X_0 вигляду $X_0 = A^{\mathrm{T}}Y$, для якої $AX_0 = E$ (тут Y — матриця розміру $m \times m$). Маємо $AA^{\mathrm{T}}Y = E$. Матриця AA^{T} є матрицею Грама рядків матриці A і тому невироджена, бо $\operatorname{rk} A = m$. Звідси $Y = (AA^{\mathrm{T}})^{-1}$ та $X_0 = A^{\mathrm{T}}(AA^{\mathrm{T}})^{-1}$.

Покажемо, що X_0 — шукана матриця. Якщо X — будь-який розв'язок рівняння $AX = E$, то $A(X - X_0) = O$ (тут O — нульова матриця розміру $m \times m$), Звідси $(X - X_0)^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = O$, а отже $(X - X_0)^{\mathrm{T}}X_0 = (X - X_0)^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(AA^{\mathrm{T}})^{-1} = O$. Таким чином, всі стовпчики матриці $X - X_0$ ортогональні до відповідних стовпчиків матриці X_0. Тому сума квадратів норм стовпчиків матриці $X = X_0 + (X - X_0)$ не менша за суму квадратів норм стовпчиків матриці X_0 та рівність досягається лише при $X = X_0$.

Відповідь: $X = A^{\mathrm{T}}(AA^{\mathrm{T}})^{-1}$.