Відкрита студентська олімпіада механіко-математичного факультету

В.Б. Брайман, О.Г. Кукуш, Д.Ю. Мітін

Чергове математичне змагання студентів Київського національного університету імені Тараса Шевченка було проведено 24 лютого 2014 року. Олімпіада проходила окремо для студентів 1–2 та 3–5 курсів. Серед учасників змагань більшість складали, звичайно, студенти механіко-математичного факультету, але були і представники факультету кібернетики та фізичного факультету КНУ, Інституту прикладного системного аналізу та Фізико-технічного інституту НТУУ "КПІ". Крім того, разом зі студентами молодших курсів традиційно було запрошено позмагатися найсильніших учнів провідних математичних шкіл Києва. Нижче ми наводимо прізвища переможців, умови та розв'язання запропонованих задач.

Переможці олімпіади серед студентів 1–2 курсів

I місце

Ківва Богдан Сергійович (мех-мат ф-т КНУ, 2 курс)
Щеглов Микита Владиславович (мех-мат ф-т КНУ, 1 курс)
Хілько Данило Ігорович (мех-мат ф-т КНУ, 1 курс)

II місце

Руденко Олександр Вячеславович (мех-мат ф-т КНУ, 2 курс)
Колінько Микола Миколайович (мех-мат ф-т КНУ, 1 курс)
Бахчеджиоглу Атілла Алперович (мех-мат ф-т КНУ, 1 курс)
Вовченко Владислав Олегович (мех-мат ф-т КНУ, 1 курс)
Дашков Олександр Олександрович (мех-мат ф-т КНУ, 1 курс)
Чаудхарі Максим Субхашович (мех-мат ф-т КНУ, 2 курс)
Шатохін Михайло Вікторович (мех-мат ф-т КНУ, 1 курс)

III місце

Діомідов Євгеній Олексійович (Русанівський ліцей, 11 клас)
Перкова Марія Ярославівна (ф-т кібернетики КНУ, 1 курс)

Переможці олімпіади серед студентів 3–5 курсів

I місце

Мулярчик Кирило Михайлович (мех-мат ф-т КНУ, 3 курс)

II місце

Юрашев Владислав Геннадійович (мех-мат ф-т КНУ, 3 курс)
Чорний Максим Володимирович (мех-мат ф-т КНУ, 4 курс)

III місце

не присуджувалося

Завдання для 1–2 курсів

1. Довести, що $\cos x < e^{-x^2/2}$ при всіх $0 < x \le \pi$. (Д.Ю. Мітін)

2. Дозволяється замінити многочлен $p(x)$ одним з многочленів $p(p(x))$, $xp(x)$ або $p(x) + x - 1$. Чи можна за декілька таких замін з деякого многочлена вигляду $x^k(x-2)^{2n}$ отримати деякий многочлен вигляду $x^l(x-2)^{2m+1}$, де k, l, m, n — натуральні числа? (Д.Ю. Мітін)

3. Нехай M_A, M_B, M_C та M_D — точки перетину медіан граней BCD, ACD, ABD та ABC тетраедра $ABCD$. На грані BCD відмітили точки A_1 та A_2 симетричні відносно M_A, а на грані ACD — точки B_1 та B_2 симетричні відносно M_B. Довести, що $V_{A_1B_1M_CM_D} = V_{A_2B_2M_CM_D}$. (О.Г. Кукуш та М.М. Рожкова)

4. Чи існує многочлен з дійсними коефіцієнтами такий, що він не має дійсних коренів, а після викреслювання з нього довільного одночлена утворюється многочлен, який має дійсний корінь? (В.Б. Брайман)

5. Нехай $x_1, x_2 \in (0,1)$ та $(x_1, x_2) \ne \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Довести нерівність

$$\sqrt{x_1(1-x_2)} + \sqrt{x_2(1-x_1)} \ge \sqrt{\frac{|x_1 - x_2|}{\max\bigl(|2x_1 - 1|, |2x_2 - 1|\bigr)}}.$$

Коли досягається рівність? (О.Г. Кукуш)

6. Нехай P — квадратна матриця така, що $P^2 = P$, причому P не є нульовою або одиничною. Чи завжди існує така матриця Q, що $Q^2 = Q$, $PQ = QPQ$, але $QP \ne PQ$? (О.В. Руденко)

7. Нехай $f, g \in C([0,1])$, причому функція f досягає свого максимуму тільки один раз, а саме в точці $x_0 \in [0,1]$. Довести, що функція $\varphi(t) = \max\limits_{x\in[0,1]} \bigl(f(x) + t \cdot g(x)\bigr)$ має похідну в точці 0 та $\varphi'(0) = g(x_0)$. (В.К. Безбородов)

Завдання для 3–5 курсів

1. Знайти $\int_0^\pi (\sin x)^{\cos x}\, dx$. (О.Г. Кукуш)

2. Нехай дійсні многочлени P_n степеня 2014 та дійсний многочлен P такі, що

$$\int_0^{2014} |P_n(x) - P(x)|^{2014}\, dx \to 0,\ n \to \infty.$$

Чи обов'язково

$$\int_0^{2014} |P_n'(x) - P'(x)|^{2014}\, dx \to 0,\ n \to \infty?$$

(О.Г. Кукуш)

3. Нехай $f_n : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \ge 1$, — борельові функції, λ_1 та λ_2 — міри Лебега на $\mathbb{R}$ та $\mathbb{R}^2$ відповідно. Відомо, що $f_n\bigl(x, g_n(x)\bigr) \xrightarrow{\lambda_1} 0,\ n \to \infty$ для будь-якої послідовності борельових функцій $g_n : [0,1] \to [0,1]$. Довести, що $f_n(x,y) \xrightarrow{\lambda_2} 0,\ n \to \infty$. (В.М. Радченко)

4. Див. задачу **4** для 1–2 курсів.
5. Див. задачу **5** для 1–2 курсів.
6. Чи існують послідовність незалежних випадкових величин $\{\varepsilon_k,\ k \geq 3\}$, де $\mathsf{M}\varepsilon_k = 0$, $\mathsf{D}\varepsilon_k = 1$, $k \geq 3$, та послідовність випадкових величин $\{x_k,\ k \geq 1\}$, де

$$x_k = x_{k-1} - x_{k-2} + x_{k-3} + \varepsilon_k + \tfrac{1}{2}\varepsilon_{k-1},\ \ k \geq 4,$$

для яких послідовність $\{\mathsf{M}x_k^2,\ k \geq 1\}$ є обмеженою? (С.В. Шкляр)
7. Нехай P — квадратна матриця така, що $P^2 = P$, причому P не є нульовою або одиничною. Чи завжди існує така матриця Q, що $Q^2 = Q$, $PQ = QPQ$, але $QP \neq PQP$?
(О.В. Руденко)

Розв'язання задач

Завдання для 1–2 курсів

1. При $\pi/2 \leq x \leq \pi$ маємо $\cos x \leq 0 < e^{-x^2/2}$, тому достатньо розглядати $0 < x < \pi/2$. Після логарифмування нерівність, яку слід довести, набуває вигляду $\ln\cos x < -x^2/2$, або $x^2/2 + \ln\cos x < 0$, $0 < x < \pi/2$. Функція $f(x) = x^2/2 + \ln\cos x$ строго спадає на $[0, \pi/2)$, бо $f'(x) = x - \operatorname{tg} x < 0$, $0 < x < \pi/2$. Тому $f(x) < f(0) = 0$, $0 < x < \pi/2$.
2. Для вихідного многочлена $x^k(x-2)^{2n}$ значення при $x = 1$ дорівнює 1, причому ця властивість зберігається при всіх дозволених замінах. Тому многочлен вигляду $x^l(x-2)^{2m+1}$, значення якого при $x = 1$ дорівнює -1, отримати не можна.

Відповідь: не можна.
3. Для довільних точок P, Q, R, S простору покладемо $f(P,Q,R,S) = \left(\overrightarrow{SP}, \overrightarrow{SQ}, \overrightarrow{SR}\right)$. Тоді $V_{KLMN} = \frac{1}{6}|f(K,L,M,N)|$ та достатньо довести, що

$$f(A_1, B_1, M_C, M_D) = f(A_2, B_2, M_C, M_D).$$

Зауважимо, що

$$\begin{aligned} f(A_1, B_1, M_C, M_D) + f(A_2, B_1, M_C, M_D) &= \left(\overrightarrow{M_DA_1} + \overrightarrow{M_DA_2}, \overrightarrow{M_DB_1}, \overrightarrow{M_DM_C}\right) = \\ &= \left(2\overrightarrow{M_DM_A}, \overrightarrow{M_DM_B} + \overrightarrow{M_BB_1}, \overrightarrow{M_DM_C}\right) = \\ &= 2\left(\overrightarrow{M_DM_A}, \overrightarrow{M_DM_B}, \overrightarrow{M_DM_C}\right) = 2f(M_A, M_B, M_C, M_D) \end{aligned}$$

(ми використали, що $\left(\overrightarrow{M_DM_A}, \overrightarrow{M_BB_1}, \overrightarrow{M_DM_C}\right) = 0$, оскільки вектор $\overrightarrow{M_BB_1}$ належить площині ACD, паралельній до площини $M_AM_CM_D$, а отже він є лінійною комбінацією векторів $\overrightarrow{M_DM_A}$ та $\overrightarrow{M_DM_C}$).

Аналогічно $f(A_2, B_2, M_C, M_D) + f(A_2, B_1, M_C, M_D) = 2f(M_A, M_B, M_C, M_D)$. Віднімаючи почленно отримані рівності, дістанемо $f(A_1, B_1, M_C, M_D) = f(A_2, B_2, M_C, M_D)$.
4. Розглянемо многочлен $P(x) = x^4 + \beta x^3 - \alpha x + 1$. Підберемо $\alpha > 0$ та $\beta > 0$ так, що

1) $x^4 + 1 - \alpha x \geq 0$ при всіх $x > 0$ та існує $x_1 > 0$, при якому $x_1^4 + 1 - \alpha x_1 = 0$,

2) $x^4+1+\beta x^3 \geq 0$ при всіх $x<0$ та існує $x_2<0$, при якому $x_2^4+1+\beta x_2^3=0$. Для цього достатньо покласти $\alpha=\min\limits_{x>0}\frac{x^4+1}{x}$ та $\beta=-\max\limits_{x<0}\frac{x^4+1}{x^3}$ (неважко перевірити, що ці найменше та найбільше значення існують та досягаються в єдиних точках $x_1>0$, $x_2<0$ відповідно).

Тоді у многочлена $P(x)$ немає дійсних коренів, оскільки

1) якщо $x\geq 0$, то $P(x)=(x^4+1-\alpha x)+\beta x^3>0$,

2) якщо $x<0$, то $P(x)=(x^4+1+\beta x^3)-\alpha x>0$.

Залишилося зауважити, що кожен з многочленів $x^4+\beta x^3-\alpha x$, $\beta x^3-\alpha x+1$, $x^4-\alpha x+1$, $x^4+\beta x^3+1$ має дійсний корінь. Для перших двох многочленів це очевидно, а для останніх двох це так за вибором $\alpha>0$ та $\beta>0$.

Відповідь: існує.

5. Розглянемо такі $t_1,t_2\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, що $x_1=\cos^2 t_1$, $x_2=\cos^2 t_2$. Тоді

$$\begin{gathered}\sqrt{x_1(1-x_2)}+\sqrt{x_2(1-x_1)}=\cos t_1\sin t_2+\cos t_2\sin t_1=\sin(t_1+t_2),\\ x_1-x_2=\cos^2 t_1-\cos^2 t_2=\tfrac{1}{2}(\cos 2t_1-\cos 2t_2)=\sin(t_1+t_2)\sin(t_1-t_2),\\ \max\bigl(|2x_1-1|,|2x_2-1|\bigr)=\max\bigl(|\cos 2t_1|,|\cos 2t_2|\bigr),\end{gathered}$$

а отже нерівність, яку слід довести, набуває вигляду

$$\sin(t_1+t_2)\max\bigl(|\cos 2t_1|,|\cos 2t_2|\bigr)\geq|\sin(t_1+t_2)\sin(t_1-t_2)|.$$

Оскільки $t_1+t_2\in(0,\pi)$, то можна поділити обидві частини нерівності на $\sin(t_1+t_2)>0$. Залишилося довести, що

$$\max\bigl(|\cos 2t_1|,|\cos 2t_2|\bigr)\geq|\sin(t_1-t_2)|.$$

Оскільки $2t_1,2t_2\in(0,\pi)$ та $(2t_1,2t_2)\neq\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, то існує таке $s\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$, що

$$\max\bigl(|\cos 2t_1|,|\cos 2t_2|\bigr)=\cos 2s.$$

Тоді $t_1,t_2\in\left[s,\frac{\pi}{2}-s\right]$, $|t_1-t_2|\leq\frac{\pi}{2}-2s$ та $|\sin(t_1-t_2)|\leq\sin\left(\frac{\pi}{2}-2s\right)=\cos 2s$, що завершує доведення.

Рівність досягається, коли при деякому $s\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ одночасно $t_1=s, t_2=\frac{\pi}{2}-s$ або $t_1=\frac{\pi}{2}-s, t_2=s$, тобто при $x_1\in(0,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},1)$, $x_2=1-x_1$.

6. Нехай P — матриця розміру $n\times n$. Множина векторів $H=\operatorname{Im}P=\{Px,\ x\in\mathbb{R}^n\}$ є підпростором $\mathbb{R}^n$, причому $H\neq\{0\}$, бо матриця P не є нульовою. Якщо $y=Px\in H$, то $Py=P^2x=Px=y$. Тому $H\neq\mathbb{R}^n$, бо матриця P не є одиничною. Покажемо, що існує така матриця Q, що $Qx\in H$ при всіх $x\in\mathbb{R}^n$, $Qy=y$ при всіх $y\in H$ та $Q\neq P$.

Оскільки P не є нульовою або одиничною, то існують такі вектори-стовпчики $a,b\in\mathbb{R}^n$, що $Pa\neq 0$ та $(I-P)^Tb\neq 0$. Тоді матриця $Q=P+Pab^T(I-P)$ є шуканою. Справді, при всіх $x\in\mathbb{R}^n$ маємо $Qx=P(x+ab^T(I-P)x)\in H$, а при всіх $y=Px\in H$ маємо $Qy=Py+Pab^T(I-P)Px=y+Pab^T(P-P^2)x=y$. Нарешті, $Q\neq P$, бо матриця $Q-P$ є добутком ненульового вектора-стовпчика Pa на ненульовий вектор-рядок $b^T(I-P)=((I-P)^Tb)^T$.

Тоді за побудовою при всіх $x \in \mathbb{R}^n$ маємо $Px \in H$ та $Qx \in H$, а отже $Q(Qx) = Qx$, $Q(Px) = Px$ та $P(Qx) = Qx$. Таким чином, $Q^2 = Q$, $QP = P$ та $PQ = Q$, звідки $PQ = (QP)Q$, але $QP = P \neq Q = PQ$.

Відповідь: завжди.

7. Для $0 < \delta < \frac{1}{2}$ покладемо $\alpha(\delta) = \max\limits_{x\in[0,1]} f(x) - \max\limits_{x\in A(\delta)} f(x)$, де

$$A(\delta) = \{x \in [0,1] : |x - x_0| \geq \delta\}, \quad B(\delta) = \{x \in [0,1] : |x - x_0| \leq \delta\}.$$

Зрозуміло, що $\alpha(\delta) > 0$. Позначимо $\|g\| = \max\limits_{x\in[0,1]} |g(x)|$. Якщо $\|g\| = 0$, то $g(x) = 0$, $x \in [0,1]$, та твердження задачі є очевидним. Надалі будемо вважати, що $\|g\| > 0$.

Лема. При $0 < t < \dfrac{\alpha(\delta)}{2\|g\|}$ найбільше значення функції $f(\cdot) + t\,g(\cdot)$ досягається на відрізку $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

Доведення леми. Справді,

$$\max_{x\in B(\delta)} (f(x) + t\,g(x)) - \max_{x\in A(\delta)} (f(x) + t\,g(x)) \geq$$
$$\geq \max_{x\in B(\delta)} f(x) - t\|g\| - \max_{x\in A(\delta)} f(x) - t\|g\| = \alpha(\delta) - 2t\|g\| > 0. \quad \square$$

Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$ та оберемо $\delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ так, що $|g(x) - g(x_0)| \leq \varepsilon$ при всіх $x \in B(\delta)$. Внаслідок леми для достатньо малих $t > 0$ маємо

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \frac{1}{t}\left(\max_{x\in[0,1]} \big(f(x) + t\,g(x)\big) - \max_{x\in[0,1]} f(x)\right) =$$
$$= \frac{1}{t}\left(\max_{x\in B(\delta)} \big(f(x) + t\,g(x)\big) - f(x_0)\right) \leq \frac{1}{t}\left(f(x_0) + t\max_{x\in B(\delta)} g(x) - f(x_0)\right)$$
$$= \max_{x\in B(\delta)} g(x) \leq g(x_0) + \varepsilon.$$

Отже, $\overline{\lim\limits_{t\to 0+}} \dfrac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} \leq g(x_0)$.

З іншого боку,

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \frac{1}{t}\left(\max_{x\in[0,1]} (f(x) + t\,g(x)) - \max_{x\in[0,1]} f(x)\right) \geq$$
$$\geq \frac{1}{t}\Big(f(x_0) + t\,g(x_0) - f(x_0)\Big) = g(x_0).$$

Отже, $\underline{\lim\limits_{t\to 0+}} \dfrac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} \geq g(x_0)$. Таким чином, $\varphi'_+(0) = \lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = g(x_0)$.

Зауважимо, що $\varphi(-t) = \max\limits_{x\in[0,1]} \big(f(x) + t\cdot(-g(x))\big)$. Тому з доведеного випливає, що $\varphi'_-(0) = -(-g(x_0)) = g(x_0)$. Тому $\varphi'(0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = g(x_0)$.

Завдання для 3–5 курсів

1. Після заміни $t = \pi - x$ інтеграл набуває вигляду $\int_0^\pi (\sin t)^{-\cos t}\,dt$. Покажемо, що $(\sin t)^{-\cos t} \sim \frac{1}{t},\ t \to 0+$. Звідси за граничною ознакою порівняння буде випливати, що зазначений інтеграл розбігається до $+\infty$.

При $t \to 0+$ маємо

$$\frac{(\sin t)^{\cos t}}{t} \sim (\sin t)^{\cos t - 1} = e^{(\cos t - 1)\ln \sin t}.$$

Оскільки $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$, то при $t \to 0+$

$$(\cos t - 1)\ln \sin t \sim -\frac{t^2}{2}\ln \sin t \sim -\frac{1}{2}\sin^2 t \cdot \ln \sin t = \left| \begin{array}{c} u = \sin t \\ u \to 0+ \end{array} \right| = -\frac{1}{2}u^2 \cdot \ln u \to 0,$$

тому $e^{(\cos t-1)\ln \sin t} \to e^0 = 1,\ t \to 0+$. Отже, $(\sin t)^{-\cos t} : \frac{1}{t} \to 1,\ t \to 0+$, що завершує доведення.

Відповідь: $+\infty$.

2. Множина $\mathcal{P}_{2014}$ многочленів степеня щонайбільше 2014 є скінченновимірним підпростором $L_{2014}([0, 2014], \lambda_1)$ (тут λ_1 — міра Лебега на $\mathbb{R}$), зокрема ця множина є замкненою. Тому з умови задачі випливає, що многочлен P теж має степінь не вище за 2014. Розглянемо на $\mathcal{P}_{2014}$ дві норми: L_{2014}-норму $\|f\|_{2014}$ та норму $\|f\| = |f(0)| + \|f'\|_{2014}$. Довільні дві норми на скінченновимірному просторі є еквівалентними, тому зі збіжності P_n до P у першій нормі випливає збіжність P_n до P у другій нормі, звідки $\|P_n' - P'\|_{2014} \to 0$, $n \to \infty$.

Відповідь: обов'язково.

3. Якщо $f_n(x, y) \overset{\lambda_2}{\nrightarrow} 0,\ n \to \infty$, то знайдеться таке $\varepsilon > 0$, що для нескінченної кількості номерів λ_2-міра множини $A_n = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : |f_n(x, y)| \ge \varepsilon\}$ є не меншою за ε.

За теоремою про добуток мір існує $y_n \in [0, 1]$ таке, що для відповідного перерізу $A_{n,y_n} = \{x \in [0, 1] : (x, y_n) \in A_n\}$ буде $\lambda_1(A_{n,y_n}) \ge \lambda_2(A_n)$. Покладемо $g_n(x) \equiv y_n$, $n \ge 1$. Тоді при всіх $x \in A_{n,y_n}$ маємо $|f_n(x, g_n(x))| = |f_n(x, y_n)| \ge \varepsilon$, причому для нескінченної кількості номерів $\lambda_1(A_{n,y_n}) \ge \lambda_2(A_n) \ge \varepsilon$. Тому $f_n\big(x, g_n(x)\big) \overset{\lambda_1}{\nrightarrow} 0,\ n \to \infty$, суперечність.

6. При всіх $k \ge 4$ маємо

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - x_{k-1} + x_{k-2} + \varepsilon_{k+1} + \tfrac{1}{2}\varepsilon_k = \\ &= \big(x_{k-1} - x_{k-2} + x_{k-3} + \varepsilon_k + \tfrac{1}{2}\varepsilon_{k-1}\big) - x_{k-1} + x_{k-2} + \varepsilon_{k+1} + \tfrac{1}{2}\varepsilon_k = \\ &= x_{k-3} + \varepsilon_{k+1} + \tfrac{3}{2}\varepsilon_k + \tfrac{1}{2}\varepsilon_{k-1}. \end{aligned}$$

Покладемо

$$y_k = x_{4k+1},\ k \ge 0, \quad \xi_k = \varepsilon_{4k+1} + \tfrac{3}{2}\varepsilon_{4k} + \tfrac{1}{2}\varepsilon_{4k-1},\ k \ge 1.$$

Тоді $y_k = y_{k-1} + \xi_k$, $k \ge 1$, та якщо $\mathsf{M}x_k^2 \le C$, $k \ge 1$, то $\mathsf{M}y_k^2 \le C$, $k \ge 0$. Але $\{\xi_k,\ k \ge 1\}$ — послідовність незалежних випадкових величин, $\mathsf{M}\xi_k = 0$, $\mathsf{D}\xi_k = \frac{7}{2}$, $k \ge 1$. Отже, для випадкових величин $y_k - y_0 = \sum_{i=1}^{k} \xi_i$, $k \geq 1$, маємо

$$\mathsf{M}(y_k - y_0) = 0, \quad \mathsf{M}(y_k - y_0)^2 = \mathsf{D}(y_k - y_0) = \sum_{i=1}^{k} \mathsf{D}\xi_i = \tfrac{7}{2}k \to \infty, \ k \to \infty,$$

а з іншого боку $\mathsf{M}(y_k - y_0)^2 \leq 2\mathsf{M}y_0^2 + 2\mathsf{M}y_k^2 \leq 4C$, $k \geq 1$, суперечність.

Відповідь: не існують.

7. Нехай P — матриця розміру $n \times n$, а I — одинична матриця розміру $n \times n$. Тоді матриця $I - P$ не є нульовою або одиничною, причому $(I - P)^2 = I - 2P + P^2 = I - P$. Застосовуючи до матриці $I - P$ замість P розв'язання задачі **6** для 1–2 курсів, дістанемо, що існує така матриця Q, що $Q^2 = Q$, $Q(I - P) = I - P$, $(I - P)Q = Q$ та $Q \neq I - P$. Матриця Q є шуканою, бо вона задовольняє співвідношення $QP = Q + P - I$ та $PQ = 0$, звідки $Q(PQ) = 0 = PQ$ та $(PQ)P = 0 \neq QP$.

Відповідь: завжди.