Відкрита студентська олімпіада механіко-математичного факультету

В.Б. Брайман, О.Г. Кукуш, Д.Ю. Мітін

Чергове математичне змагання студентів Київського національного університету імені Тараса Шевченка було проведено 6 березня 2013 року. Олімпіада проходила окремо для студентів 1–2 та 3–5 курсів. Серед учасників змагань більшість складали, звичайно, студенти механіко-математичного факультету, але були і представники факультету кібернетики та фізичного факультету КНУ, Інституту прикладного системного аналізу та Фізико-технічного інституту НТУУ «КПІ», Фізико-математичного інституту НПУ імені М. П. Драгоманова. Крім того, разом зі студентами молодших курсів традиційно було запрошено позмагатися найсильніших учнів провідних математичних шкіл міста Києва. Приємно відмітити вдалий виступ на олімпіаді учнів ліцею «Лідер», ліцею № 208 та Русанівського ліцею. Нижче ми наводимо прізвища переможців, умови та розв'язання запропонованих задач.

Переможці олімпіади серед студентів 1–2 курсів

I місце

Ківва Богдан Сергійович (мех-мат ф-т КНУ, 1 курс)
Мулярчик Кирило Михайлович (мех-мат ф-т КНУ, 2 курс)

II місце

Руденко Олександр Вячеславович (мех-мат ф-т КНУ, 1 курс)
Юрашев Владислав Геннадійович (мех-мат ф-т КНУ, 2 курс)
Вовченко Владислав Олегович (ліцей № 208, 11 клас)
Сердюк Ярослава Павлівна (мех-мат ф-т КНУ, 1 курс)
Чаудхарі Максим Субхашович (мех-мат ф-т КНУ, 1 курс)

III місце

Назаренко Єгор Васильович (мех-мат ф-т КНУ, 2 курс)
Хілько Данило Ігорович (ліцей № 208, 11 клас)
Фатенко Владислав Васильович (ІПСА НТУУ «КПІ», 1 курс)
Бахчеджиоглу Атілла Алперович (ліцей № 208, 11 клас)
Дашков Олександр Олександрович (ліцей «Лідер», 11 клас)
Діомідов Євгеній Олексійович (Русанівський ліцей, 10 клас)
Кубівський Ярослав Володимирович (мех-мат ф-т КНУ, 2 курс)
Марковіченко Олександр Олексійович (ф-т кібернетики КНУ, 1 курс)
Піпко Анна Сергіївна (ІПСА НТУУ «КПІ», 1 курс)
Рязанов Андрій Володимирович (ліцей «Лідер», 11 клас)
Ханов Ігор Михайлович, мех-мат ф-т КНУ, 2 курс)

Яриш Олександр Володимирович (мех-мат ф-т КНУ, 1 курс)
Осіпа Андрій Павлович (мех-мат ф-т КНУ, 1 курс)

Переможці олімпіади серед студентів 3–5 курсів

І місце

Чорний Максим Володимирович (мех-мат ф-т КНУ, 3 курс)
Сенін Віталій Ігорович (мех-мат ф-т КНУ, 4 курс)
Веклич Богдан Васильович (мех-мат ф-т КНУ, 3 курс)

ІІ місце

Сорока Богдан Віталійович (мех-мат ф-т КНУ, 4 курс)
Кузнєцов Михайло Валерійович (мех-мат ф-т КНУ, 3 курс)

ІІІ місце

Любашенко Дарина Володимирівна (мех-мат ф-т КНУ, 3 курс)
Руснак Ігор Олександрович (ф-т кібернетики КНУ, 3 курс)

Завдання для 1–2 курсів

1. Знайти всі неперервні функції $f : [1,2] \to [1,2]$ такі, що $f(1) = 2$ та $f(f(x))f(x) = 2$ для всіх $x \in [1,2]$. (І. С. Фещенко)

2. Чи існує скінченне кільце (не обов'язково комутативне чи з одиницею), що для довільного його елемента x знайдеться такий елемент y, відмінний від x, що $y^2 = x$? (С. В. Слободянюк)

3. У даному трикутнику довжини сторін та тангенси кутів є арифметичними прогресіями. Знайти кути цього трикутника. (О. Г. Кукуш, М. М. Рожкова)

4. Нехай $x_1, \ldots, x_n, c > 0$. Довести нерівність

$$\sqrt{x_1 + \sqrt{x_2 + \sqrt{\ldots + \sqrt{x_n + c}}}} < \sqrt{x_1 + \sqrt{x_2 + \sqrt{\ldots + \sqrt{x_n}}}} + \frac{c}{2^n \sqrt{x_1 \ldots x_n}} \, .$$

(І. С. Фещенко)

5. Нехай A, B — такі матриці $n \times n$, що для довільної матриці C розміру $n \times n$ рівняння $AX + YB = C$ має розв'язок X, Y. Довести, що тоді для довільної матриці C рівняння $A^{2013}X + YB^{2013} = C$ також має розв'язок. (І. С. Фещенко)

6. Дано функції $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такі, що для довільних двох різних чисел x, y виконується або нерівність $f(x) + g(y) > 0$, або нерівність $f(y) + g(x) > 0$. Довести, що не існує таких чисел a та b, що для всіх $x \in (a, b)$ виконується $f(x) + g(x) < 0$. (О. В. Руденко)

7. Назвемо число гарним, якщо воно є степенем натурального числа порядку $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Скінченна чи нескінченна множина натуральних чисел, які не є сумою двох гарних? (А. В. Бондаренко)

8. Нехай $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Чи може дорівнювати одиничній матриці добуток $X_1 X_2 \ldots X_n$, в якому кожен множник X_i дорівнює або A, або B? (Є. О. Македонський)

Завдання для 3–4 курсів

1. Обчислити суму ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,2^n} \cos \frac{\pi n - 1}{2}.$$

(Д. Ю. Мітін)

2. Чи існує скінченне ненульове кільце (не обов'язково комутативне чи з одиницею), що для довільного ненульового елементу x знайдеться такий елемент y, відмінний від x, що $y^2 = x$? (С. В. Слободянюк)

3. Див. задачу **6** для 1-2 курсів.

4. Нехай A, B — такі комплексні матриці $n \times n$, що для довільної матриці C розміру $n \times n$ рівняння $AX + YB = C$ має розв'язок X, Y. Довести, що $k_0(A) + k_0(B) \leq n$, де $k_0(U)$ — кількість нулів на головній діагоналі жорданової форми матриці U. (І. С. Фещенко)

5. Нехай $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ вимірна за Лебегом. Чи завжди виконується рівність

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}} \bigl(\operatorname*{ess\,sup}_{y \in \mathbb{R}} f(x,y) \bigr) = \operatorname*{ess\,sup}_{y \in \mathbb{R}} \bigl(\operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}} f(x,y) \bigr)?$$

(Тут істотний супремум береться відносно міри Лебега на прямій). (О. Г. Кукуш)

6. Чи існують такі дійсні раціональні функції $\varphi(x)$ та $\psi(x)$, які не є сталими, що $\psi'(x) = \dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$ для всіх x з перетину множин визначення лівої та правої частин цієї рівності? (Є. О. Македонський)

7. Нехай P — ймовірнісна міра на борельовій σ-алгебрі в $\mathbb{R}^2$, причому для кожної прямої ℓ виконується $\mathrm{P}(\ell) < 1$. Чи завжди існує обмежена борельова множина A, що для кожної прямої ℓ справджується нерівність $\mathrm{P}(A \cap \ell) < \mathrm{P}(A)$? (О. Г. Кукуш)

8. Нехай $\{a_n\}$ — така послідовність дійсних чисел, що $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty$; $\{\xi_n\}$ — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин з розподілом

$$\mathrm{P}\{\xi_1 = 1\} = 2/3, \quad \mathrm{P}\{\xi_1 = 0\} = 1/3,$$

$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$. Довести, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{S_n} a_n$ збігається за ймовірністю.

(Г. М. Шевченко)

Розв'язання та вказівки

1–2 курси

1. *Відповідь:* $f(x) = \frac{2}{x}$, $x \in [1, 2]$.

При $x = 1$ з умови дістаємо, що $f(2) = 1$. Оскільки $f(1) = 2$ та $f(2) = 1$, то за теоремою про проміжне значення для кожного $y \in [1, 2]$ існує таке $z \in [1, 2]$, що $f(z) = y$. Тоді при $x = z$ дістаємо $f(y)y = 2$, тобто $f(y) = \frac{2}{y}$, $y \in [1, 2]$. Залишається виконати перевірку.

2. *Відповідь:* не існує.

Якщо шукане скінченне кільце існує, то квадрати усіх його елементів є попарно різними (справді, інакше існує елемент, який не є квадратом жодного елемента кільця). Проте за умовою існує такий $y \neq 0$, що $y^2 = 0$, а також $0^2 = 0$ (де 0 — нульовий елемент кільця), суперечність.

3. *Відповідь:* усі кути дорівнюють $\frac{\pi}{3}$, тобто трикутник є рівностороннім.

Нехай у трикутнику ABC маємо $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} C = 2 \operatorname{tg} B$. Тоді

$$\operatorname{tg} B = -\operatorname{tg}(A + C) = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} A \operatorname{tg} C - 1} = \frac{2 \operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A \operatorname{tg} C - 1}.$$

Звідси $\operatorname{tg} A \operatorname{tg} C = 3$. Отже, обидва числа $\operatorname{tg} A$ та $\operatorname{tg} C$ є додатними, а тому і $\operatorname{tg} B$ є додатним. Таким чином, трикутник ABC є гострокутним.

Оскільки функція $y = \operatorname{tg} x$ зростає на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, то B — середній за величиною кут трикутника. З теореми синусів випливає, що синуси кутів трикутника теж утворюють арифметичну прогресію. Оскільки функція $y = \sin x$ теж зростає на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, то середнім членом прогресії є $\sin B$, тобто $\sin A + \sin C = 2 \sin B$. Далі, на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ функція $y = \operatorname{tg} x$ опукла вниз, а функція $y = \sin x$ опукла вгору. Тому $\sin B = \frac{\sin A + \sin C}{2} \leq \sin \frac{A+C}{2}$, звідки $B \leq \frac{A+C}{2}$, та $\operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} C}{2} \geq \operatorname{tg} \frac{A+C}{2}$, звідки $B \geq \frac{A+C}{2}$. Таким чином, $B = \frac{A+C}{2} = \frac{\pi - B}{2}$, тобто $B = \frac{\pi}{3}$. Тепер з умов $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} C = 2\sqrt{3}$ та $\operatorname{tg} A \operatorname{tg} C = 3$ дістаємо, що $\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} C = \sqrt{3}$ та остаточно $A = B = C = \frac{\pi}{3}$.

4. Покладемо

$$f(x) = \sqrt{x_1 + \sqrt{x_2 + \sqrt{\ldots + \sqrt{x_n + x}}}}, \quad x \geq 0.$$

За теоремою Лагранжа існує таке $\theta \in (0, c)$, що $f(c) - f(0) = cf'(\theta)$. При $\theta > 0$ маємо

$$f'(\theta) = \frac{1}{2\sqrt{x_1 + \sqrt{x_2 + \sqrt{\ldots + \sqrt{x_n + \theta}}}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x_2 + \sqrt{\ldots + \sqrt{x_n + \theta}}}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2\sqrt{x_n + \theta}},$$

отже

$$f'(\theta) < \frac{1}{2^n \sqrt{x_1 \ldots x_n}} \quad \text{та} \quad f(c) < f(0) + \frac{c}{2^n \sqrt{x_1 \ldots x_n}},$$

що і вимагалось довести.

5. Покажемо, що принаймні одна з матриць A, B є невиродженою. Справді, якщо матриця A вироджена, то за допомогою елементарних перетворень рядків можна зробити її перший рядок нульовим, а тому існує така невироджена матриця U, що перший рядок матриці UA нульовий. Аналогічно якщо матриця B вироджена, то існує така невироджена матриця V, що перший стовпчик матриці BV нульовий. Зауважимо, що якщо X, Y — розв'язок рівняння $AX + YB = U^{-1}CV^{-1}$, то $UA(XV) + (UY)BV = C$, тобто рівняння $UAX + YBV = C$ теж має розв'язок для довільної матриці C. Проте для довільних матриць X, Y перший рядок матриці UAX та перший стовпчик матриці YBV є нульовими, а тому рівняння $UAX + YBV = C$ не може мати розв'язків, якщо елемент матриці C на перетині цих рядка та стовпчика є ненульовим, суперечність.

Якщо матриця A невироджена, то рівняння $A^{2013}X + YB^{2013} = C$ має розв'язок $X = A^{-2013}C, Y = 0$, а якщо матриця B невироджена, то відповідно можна покласти $X = 0, Y = CB^{-2013}$.

6. Достатньо довести, що множина $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) + g(x) < 0\}$ є не більше ніж зліченною. Зафіксуємо довільне $\delta > 0$ та покажемо, що множина

$$A_\delta = \{x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) + g(x) < -\delta\}$$

є щонайбільше зліченною. Нехай $x, y \in A_\delta$. Тоді $f(x) + g(x) < -\delta$, $f(y) + g(y) < -\delta$ та $f(x) + g(y) > 0$ або $f(y) + g(x) > 0$. Якщо $f(x) + g(y) > 0$, то $f(x) - f(y) > -(f(y) + g(y)) > \delta$, а якщо $f(y) + g(x) > 0$, то $f(x) - f(y) < f(x) + g(x) < -\delta$. Отже, для довільних двох різних точок $x, y \in A_\delta$ дістаємо, що $|f(x) - f(y)| > \delta$. Тому кожна з множин $B_{k,\delta} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) \in [k\delta, k\delta + \delta)\}$ містить не більше однієї точки з A_δ. Але $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} B_{k,\delta} = \mathbb{R}$, тому множина A_δ щонайбільше зліченна при кожному $\delta > 0$. Звідси множина $A = \bigcup\limits_{n\geq 1} A_{1/n}$ щонайбільше зліченна, що і завершує доведення.

7. *Відповідь:* нескінченна.

Зафіксуємо натуральне число N та оцінимо кількість менших за N натуральних чисел, які не є сумою двох гарних. Квадрати натуральних чисел дають лише остачі 0 та 1 при діленні на 4, тому жодне число вигляду $4j + 3$ не є сумою двох квадратів.

Нехай $n^k + m^l < N$, де $k \geq 3$ та $l \geq 2$. Звідси $n \leq N^{1/3}$, $m \leq N^{1/2}$ та $k, l \leq \log_2 N$ за умови, що $n, m \geq 2$ (при $n = 1$ можна вважати, що $k = 3$, а при $m = 1$ можна вважати, що $l = 2$). Отже, існує щонайбільше $N^{5/6}(\log_2 N)^2$ менших за N сум двох гарних чисел, відмінних від сум двох квадратів. Тому серед менших за N чисел вигляду $4j + 3$ є принаймні $\left[\frac{N}{4}\right] - N^{5/6}(\log_2 N)^2 \to \infty$, $N \to \infty$, чисел, які не є сумами двох гарних.

8. *Відповідь:* не може.

Будемо казати, що матриця $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ має тип I, якщо виконуються умови

$$|a| > |c|, \quad |b| > |d|, \quad ac \geq 0, \quad bd \geq 0, \tag{I}$$

та має тип II, якщо виконуються умови

$$|a| < |c|, \quad |b| < |d|, \quad ac \leq 0, \quad bd \leq 0. \tag{II}$$

Зокрема матриця $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ має тип I, а матриця $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ має тип II.

Розглянемо матрицю $AM = \left(\begin{smallmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Якщо матриця M має тип I, то

$$\begin{aligned} |a+2c| &= |a| + 2|c| > |c|, \quad |b+2d| = |b| + 2|d| > |d|, \\ (a+2c)c &= ac + 2c^2 \geq 0, \quad (b+2d)d = bd + d^2 \geq 0, \end{aligned}$$

а якщо матриця M має тип II, то

$$\begin{aligned} |a+2c| &= 2|c| - |a| > |c|, \quad |b+2d| = 2|d| - |b| > |d|, \\ (a+2c)c &= 2c^2 - (-ac) \geq 0, \quad (b+2d)d = d^2 - (-bd) \geq 0, \end{aligned}$$

тобто в обох випадках матриця AM має тип I. Аналогічно перевіряється, що якщо матриця M має тип I або тип II, то матриця $BM = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -2a+c & -2b+d \end{smallmatrix}\right)$ має тип II. Звідси випливає, що будь-який добуток $X_1 X_2 \dots X_n$, в якому кожен множник X_i дорівнює A або B, має тип I при $X_1 = A$ та має тип II при $X_1 = B$, а тому не може дорівнювати одиничній матриці, для якої не виконуються умови (I) та (II).

3–5 курси

1. *Відповідь:* 1.

При всіх $x \in \mathbb{R}$ маємо

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi n}{2} - x\right)}{n!} x^n = \cos x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi n}{2}}{n!} x^n + \sin x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n}{2}}{n!} x^n =$$
$$= \cos x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \sin x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)!} x^{2k-1} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Зокрема при $x = \frac{1}{2}$ дістанемо суму ряду з умови задачі.

2. *Відповідь:* не існує.

Якщо шукане скінченне кільце існує, то квадрати усіх його елементів є попарно різними (справді, інакше існує елемент, який не є квадратом жодного елемента кільця). Зафіксуємо довільний ненульовий елемент кільця x та розглянемо послідовність $x, x^2, x^4, x^8, \dots$ Оскільки кільце скінченне, то деякі елементи цієї послідовності є однаковими. Нехай $x^{2^{k+n}} = x^{2^k}$. Оскільки квадрати всіх елементів кільця є різними, то звідси випливає, що $x^{2^n} = x$. Покладемо $a = x^{2^n - 1} \neq 0$. Тоді $a^2 = (x^{2^n-1})^2 = x^{2^n} \cdot x^{2^n-2} = x \cdot x^{2^n-2} = a$, але за умовою існує елемент $b \neq a$, для якого теж $b^2 = a$, суперечність.

4. У розв'язанні задачі **5** для 1-2 курсів встановлено, що принаймні одна з матриць A, B є невиродженою. Тому одне з чисел $k_0(A)$ та $k_0(B)$ дорівнює 0, а інше не більше за n.

5. *Відповідь:* завжди.

Нехай $C_{xy} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}}\bigl(\operatorname*{ess\,sup}_{y\in\mathbb{R}} f(x,y)\bigr)$, $C_{yx} = \operatorname*{ess\,sup}_{y\in\mathbb{R}}\bigl(\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}} f(x,y)\bigr)$, λ_1 — міра Лебега на прямій та λ_2 — міра Лебега на площині. Доведемо, що завжди $C_{xy} = C_{yx} = C$, де $C = \operatorname*{ess\,sup}_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)$ — істотний супремум відносно міри λ_2.

Зафіксуємо довільне $a \in \mathbb{R}$ та розглянемо множини $A_a = \{(x, y) \,|\, f(x, y) > a\}$ та $A_{a,x} = \{y \,|\, f(x, y) > a\}$, $x \in \mathbb{R}$. Тоді

$$\lambda_2(A_a) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_1(A_{a,x}) d\lambda_1(x).$$

Якщо $C < \infty$, то при $a = C$ маємо $\lambda_2(A_C) = 0$, звідки $\lambda_1(A_{C,x}) = 0$ для майже всіх $x \in \mathbb{R}$. Тоді $\operatorname*{ess\,sup}_{y\in\mathbb{R}} f(x, y) \le C$ для майже всіх $x \in \mathbb{R}$, а отже $C_{xy} \le C$. При $C = \infty$ нерівність $C_{xy} \le C$ теж очевидно виконується.

При довільному $a < C$ маємо $\lambda_2(A_C) > 0$, а тому існує множина $B \subset \mathbb{R}$, для якої $\lambda_1(B) > 0$ та $\lambda_1(A_{a,x}) > 0$, $x \in B$. Тоді $\operatorname*{ess\,sup}_{y\in\mathbb{R}} f(x, y) > a$, $x \in B$, звідки $C_{xy} > a$. Оскільки $a < C$ довільне, то $C_{xy} \ge C$.

З нерівностей $C_{xy} \le C$ та $C_{xy} \ge C$ випливає, що насправді $C_{xy} = C$. Аналогічно $C_{yx} = C$, тому $C_{xy} = C_{yx}$.

6. *Відповідь:* не існують.

Для незвідного многочлена p та раціональної функції φ покладемо $\operatorname{ord}_p(\varphi) = n \in \mathbb{Z}$, якщо $\varphi = p^n \cdot \frac{q}{r}$, де q, r — многочлени, які не діляться на p. Тоді

$$\varphi' = np^{n-1}p' \cdot \frac{q}{r} + p^n \cdot \frac{q'r - qr'}{r^2} = p^{n-1} \cdot \frac{np'qr + p(q'r - qr')}{r^2}, \quad \frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{np'qr + p(q'r - qr')}{pqr}.$$

Звідси випливає, що при $n \ne 0$ маємо $\operatorname{ord}_p(\varphi') = n - 1$ та $\operatorname{ord}_p(\frac{\varphi'}{\varphi}) = -1$, а при $n = 0$ маємо $\operatorname{ord}_p(\varphi') \ge 0$.

Нехай тепер φ та ψ — відмінні від сталих раціональні функції, для яких $\psi' = \frac{\varphi'}{\varphi}$. Розглянемо незвідний многочлен p, який є дільником чисельника або знаменника функції φ. Тоді $\operatorname{ord}_p(\varphi) \ne 0$, а тому $\operatorname{ord}_p(\psi') = \operatorname{ord}_p(\frac{\varphi'}{\varphi}) = -1$. З іншого боку, якщо $\operatorname{ord}_p(\psi) = k \ne 0$, то $\operatorname{ord}_p(\psi') = k - 1 \ne -1$, а якщо $\operatorname{ord}_p(\psi) = 0$, то $\operatorname{ord}_p(\psi) \ge 0$, тобто в обох випадках дістаємо суперечність з рівністю $\operatorname{ord}_p(\psi') = -1$.

7. *Відповідь:* завжди.

Для скінченної міри μ на борельовій σ-алгебрі $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ позначимо $\operatorname{supp}\mu$ носій міри μ, тобто таку найменшу замкнену множину F, що $\mu(F) = \mu(\mathbb{R}^2)$.

Переформулюємо твердження задачі: якщо $\operatorname{supp} \mathrm{P}$ не лежить на жодній прямій, то існує така обмежена борельова множина A, що носій звуженої міри $\mathrm{P}_A(B) = \mathrm{P}(A \cap B)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, також не лежить на жодній прямій.

За умовою носій P містить принаймні три точки u, v, w, які не лежить на одній прямій. Неважко перевірити, що якщо A — довільна замкнена множина, то $\operatorname{supp} \mathrm{P}_A = \operatorname{supp} \mathrm{P} \cap A$. Нехай тепер A — замкнена куля з центром у початку координат та радіусом $R \ge \max\{\|u\|, \|v\|, \|w\|\}$. Тоді носій міри P_A містить усі три точки u, v, w, а отже не лежить на жодній прямій.

8. Покажемо, що часткові суми ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{S_n} a_n$ фундаментальні в $L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Звідси випливатиме, що ряд збігається в $L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$, а отже і за ймовірністю.

Розглянемо $T_{k,k+m} = \sum\limits_{n=k}^{k+m} (-1)^{S_n} a_n$. Маємо $\mathrm{M}T^2_{k,k+m} = \sum\limits_{i,j=k}^{k+m} a_i a_j \mathrm{M}(-1)^{S_i+S_j}$. Далі, $\mathrm{M}(-1)^{S_i+S_j} = \mathrm{M}(-1)^{S_i-S_j} = \mathrm{M}(-1)^{S_{|i-j|}}$ (тут $S_0 = 0$). Сума S_n має біноміальний розподіл з параметрами n, $p = 2/3$, $q = 1/3$. Тому

$$\mathrm{M}(-1)^{S_n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k p^k q^{n-k} = (q-p)^n = (-1/3)^n,$$

$$\mathrm{M}T^2_{k,k+m} = \sum_{i,j=k}^{k+m} a_i a_j (-1/3)^{|i-j|} = \sum_{i=k}^{k+m} a_i^2 + 2 \sum_{k\le i<j\le k+m} a_i a_j (-1/3)^{j-i} \le$$
$$\le \sum_{i=k}^{k+m} a_i^2 + 2 \sum_{s=1}^{m} \sum_{k\le i\le k+m-s} |a_i a_{i+s}| (1/3)^s.$$

За нерівністю Коші-Буняковського

$$\sum_{k\le i\le k+m-s} |a_i a_{i+s}| \le \left(\sum_{k\le i\le k+m-s} a_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k\le i\le k+m-s} a_{i+s}^2 \right)^{1/2} \le \sum_{i=k}^{\infty} a_i^2,$$

отже

$$\mathrm{M}T^2_{k,k+m} \le \sum_{i=k}^{\infty} a_i^2 \left(1 + 2 \sum_{s=1}^{\infty} (1/3)^s \right) = 2 \sum_{i=k}^{\infty} a_i^2 \to 0, \ k \to \infty.$$

Таким чином, часткові суми ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{S_n} a_n$ фундаментальні в $L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$, що і вимагалось довести.