Відкрита студентська олімпіада механіко-математичного факультету

В.Б. Брайман, О.Г. Кукуш, Д.Ю. Мітін

Чергове математичне змагання студентів Київського університету було проведено 22 лютого 2012 року. Традиційно до участі запрошувались представники інших вузів. Як завжди, окремо змагалися студенти I–II та III–V курсів. Нижче ми наводимо прізвища переможців, умови та розв'язання запропонованих задач.

Переможці олімпіади серед студентів I–II курсів.

I місце

Мулярчик Кирило Михайлович (мех-мат ф-т КНУ, 1 курс)
Чорний Максим Володимирович (мех-мат ф-т КНУ, 2 курс)

II місце

Ханов Ігор Михайлович (мех-мат ф-т КНУ, 1 курс)
Бахчеджиоглу Атілла Алперович (ліцей №208, 10 клас)
Веклич Богдан Васильович (мех-мат ф-т КНУ, 2 курс)

III місце

Кузнєцов Михайло Валерійович (мех-мат ф-т КНУ, 2 курс)
Руснак Ігор Олександрович (ф-т кібернетики КНУ, 2 курс)

Переможці олімпіади серед студентів III–V курсів.

I місце

Македонський Євген Олександрович (мех-мат ф-т КНУ, 5 курс)
Власюк Олександр Васильович (мех-мат ф-т КНУ, 3 курс)
Сенін Віталій Ігорович (мех-мат ф-т КНУ, 3 курс)

II місце

Макаров Микита Миколайович (мех-мат ф-т КНУ, 3 курс)
Семікіна Юлія Сергіївна (мех-мат ф-т КНУ, 4 курс)

III місце

Коляденко Марія Павлівна (ф-т кібернетики КНУ, 3 курс)
Сорока Богдан Віталійович (мех-мат ф-т КНУ, 3 курс)
Пархомець Артем Дмитрович (ф-т кібернетики КНУ, 3 курс)
Шишацький Юрій Олександрович (мех-мат ф-т КНУ, 4 курс)

Завдання для 1–2 курсів

1. Нехай $a_{ij} = \mathrm{tg}(i-j)$, $i, j = 0, 1, \ldots, 2012$. Обчислити $\det(a_{ij})$. (Д.Ю. Мітін)
2. Функція визначена на відрізку, монотонна та має первісну (в звичайному сенсі). Чи обов'язково ця функція рівномірно неперервна на цьому відрізку?
(О.Н. Нестеренко)
3. Знайти геометричне місце центрів вписаних кіл трикутників, дві з вершин якого є фокусами даного еліпса, а третя належить цьому еліпсу. (М.М. Рожкова)

4. Довести нерівність

$$\frac{1}{x_1^{x_2}} + \frac{1}{x_2^{x_3}} + \ldots + \frac{1}{x_{n-1}^{x_n}} + \frac{1}{x_n^{x_1}} \geq \frac{n^2}{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$

для всіх додатних чисел $x_1, \ldots, x_n$ таких, що

$$x_1 + \ldots + x_n \geq \max(n,\ x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_1).$$ (Д.Ю. Мітін)

5. Позначимо через $p(n)$ кількість розв'язків $(x_1, \ldots, x_n)$ у невід'ємних цілих числах рівняння

$$x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n = n.$$

Довести, що $p(n) = O(\alpha^n)$, $n \to \infty$, при всіх $\alpha > 1$. (А.В. Бондаренко)

6. Знайти всі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такі, що для всіх $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)$$

та f неперервна в точці 1. (О.Г. Кукуш)

7. Дано послідовність чисел $\{a_n : n \geq 1\}$, що задовольняє співвідношення $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 3a_n + 2\sqrt{2(a_n^2 - 1)}$, $n \geq 1$. Довести, що всі члени цієї послідовності є натуральними числами, причому числа a_{n+1} та a_{2n+1} взаємно прості. (О.В. Руденко)

8. Чи існують такі дійсні матриці A та B розміру 2×2, $\det A > 1$, $\det B > 1$, що для кожного $u_0 \in \mathbb{R}^2$ знайдеться послідовність матриць $\{M_i : i \geq 1\} \subset \{A, B\}$, для якої послідовність векторів $u_i = M_i u_{i-1}$, $i \geq 1$, обмежена? (Р.В. Скуратовський)

9. Нехай $n \geq 3$, $k^* = k^*(n)$ — найменший з номерів k, при яких виконується нерівність

$$\frac{1}{n-k} \sum_{j=k}^{n} \frac{n-j}{j} \leq 1.$$

Довести, що існує $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{k^*(n)}{n}$. (С.І. Доценко, О.Г. Кукуш)

Завдання для 3–5 курсів

1. Нехай (X, ρ), (Y, ρ) — метричні простори, кожен з яких містить принаймні дві точки. Чи завжди існує неперервна за сукупністю змінних функція $f(x, y)$, $x \in X$, $y \in Y$, яку не можна подати у вигляді суми $g(x) + h(y)$, де g, h — деякі функції?

(О.Г. Кукуш)

2. Нехай ξ, η — випадкові величини такі, що $P\{\xi \neq 0,\ \eta \neq 0\} = 0$, $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — борелева обмежена функція. Довести, що

$$\mathsf{M}u(\xi + \eta) = \mathsf{M}u(\xi) + \mathsf{M}u(\eta) - u(0).$$ (О. Г. Кукуш)

3. Нехай функція $f \in C(\mathbb{R})$ має скінченну границю $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$. Довести, що:

а) при $a > 0$ всі розв'язки рівняння $\dot{x} + ax = f(t)$ мають спільну границю при $t \to +\infty$

та знайти цю границю;
б) при $a < 0$ лише один розв'язок зазначеного рівняння має скінченну границю при $t \to +\infty$.

(І.О. Парасюк)

4. Нехай A та B — комплексні матриці 3×3, $A^2 = B^2 = 0$. Яким може бути набір власних значень матриці $A + B$? (І.С. Фещенко)

5. Нехай λ — скінченна міра на $(X, \mathcal{F})$, $g_n : X \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$ — невід'ємні вимірні функції, для яких

$$\int_X \frac{g_n^2}{1 + g_n} \, \mathrm{d}\lambda \to 0, \quad n \to \infty.$$

Довести, що $\displaystyle\int_X g_n \, \mathrm{d}\lambda \to 0$, $n \to \infty$. (В.М. Радченко)

6. Знайти всі $a \in \mathbb{C}$, для яких у комплексному гільбертовому просторі l_2 існують вектори $v_1, v_2, \ldots$ такі, що $\|v_k\| = 1$ при $k \geq 1$ та $(v_i, v_j) = a$ при $i > j \geq 1$. (І.С. Фещенко)

7. Нехай функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задовольняє рівність

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) + 2f(y), \quad x, y \in \mathbb{R},$$

причому f неперервна в точці 0. Довести, що функція $\varphi(x) = f(x)/x$, $x \neq 0$, $\varphi(0) = 0$, задовольняє рівність $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$. (С.В. Шкляр, О.Г. Кукуш)

8. Див. задачу **8** для 1-2 курсів.

9. Див. задачу **9** для 1-2 курсів.

Розв'язання та вказівки

1–2 курси

1. Зауважимо, що $a_{ij} = -a_{ji}$, $i, j = 0, 1, \ldots, 2012$, тобто матриця $A = (a_{ij})_{i,j=0}^{2012}$ є кососиметричною, $A^T = -A$. Отже,

$$\det A = \det A^T = \det(-A) = (-1)^{2013} \det A = -\det A,$$

звідки $\det A = 0$.

Відповідь: $\det(a_{ij}) = 0$.

2. Нехай функція f визначена на відрізку $[a, b]$, монотонна та має первісну F. Доведемо, що $f \in C([a, b])$. Нехай $x_0 \in [a, b)$. За теоремою Лагранжа при кожному $0 < h < b - x_0$ існує таке $\theta_h \in (x_0, x_0 + h)$, що $\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(\theta_h)$. Внаслідок монотонності f існує правостороння границя $f(x_0+)$. Тоді

$$f(x_0) = F'(x_0) = \lim_{h \to 0+} f(\theta_h) = f(x_0+).$$

Аналогічно для $x_0 \in (a, b]$ маємо $f(x_0) = f(x_0-)$, отже $f \in C([a, b])$, звідки за теоремою Кантора f рівномірно неперервна на $[a, b]$.

Відповідь: так, обов'язково.

3. Розглянемо прямокутну декартову систему координат, у якій даний еліпс має канонічне рівняння $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ a>b>0$ (рис. 1). Фокуси F_1, F_2 мають координати $(\pm c, 0)$, де $c=\sqrt{a^2-b^2}$. Нехай $A(x,y)$ — довільна точка еліпса, яка не лежить на осі абсцис, I — центр вписаного кола трикутника F_1F_2A. Тоді I лежить на бісектрисі AL цього трикутника. Покладемо $F_1A=u$, $F_2A=v$, $u+v=2a$. Нехай точка L має координати $(x_L, 0)$. За властивістю бісектриси $F_1L : F_2L = u : v$, тому

$$F_1L = x_L + c = F_1F_2 \cdot \frac{u}{u+v} = \frac{2cu}{u+v},$$

звідки

$$x_L = \frac{c(u-v)}{u+v} = \frac{c(u^2-v^2)}{(u+v)^2} = \frac{c(u^2-v^2)}{4a^2}.$$

Далі, $u^2-v^2=(x+c)^2+y^2-(x-c)^2-y^2=4cx$, отже $x_L=\frac{c^2x}{a^2}$.

Знову за властивістю бісектриси, точка $I(x_I, y_I)$ ділить відрізок AL у відношенні

$$AF_1 : F_1L = u : \frac{2cu}{u+v} = (u+v) : 2c = a : c,$$

звідки

$$x_I = \frac{cx+ax_L}{a+c} = \frac{cx}{a}, \quad y_I = \frac{cy}{a+c}.$$

Таким чином, точка I належить еліпсу, який отримується з вихідного еліпса стиском до осі Oy в $\frac{c}{a}$ разів та до осі Ox в $\frac{c}{a+c}$ разів.

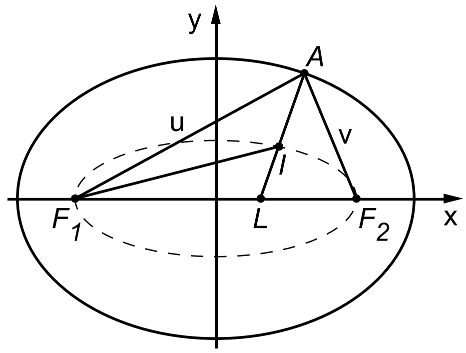

Рис. 1.

Відповідь: шукане геометричне місце — еліпс з великою віссю F_1F_2, з якого вилучено точки F_1 та F_2.

4. За нерівністю Коші

$$\frac{1}{x_1^{x_2}}+\frac{1}{x_2^{x_3}}+\ldots+\frac{1}{x_n^{x_1}} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{x_1^{x_2}x_2^{x_3}\ldots x_n^{x_1}}}.$$

За ваговою нерівністю Коші

$$(x_1^{x_2}x_2^{x_3}\ldots x_n^{x_1})^{\frac{1}{x_1+\ldots+x_n}} \leq \frac{x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_nx_1}{x_1+\ldots+x_n},$$

отже

$$\sqrt[n]{x_1^{x_2}x_2^{x_3}\ldots x_n^{x_1}} \leq \left(\frac{x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_nx_1}{x_1+\ldots+x_n}\right)^{\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}} \leq \frac{x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_nx_1}{x_1+\ldots+x_n}$$

(справді, вираз у дужках не перевищує 1, а показник степеня не менший за 1).

Таким чином,

$$\frac{1}{x_1^{x_2}}+\frac{1}{x_2^{x_3}}+\ldots+\frac{1}{x_n^{x_1}} \geq \frac{n(x_1+\ldots+x_n)}{x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_nx_1} \geq$$
$$\geq \frac{n^2}{x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_nx_1} \geq \frac{n^2}{x_1^2+\ldots+x_n^2}.$$

5. Нехай $n \geq 2$, $m=[\sqrt{n}]$. Кожне з m чисел $x_1,\ldots,x_m$ ціле невід'ємне та не перевищує n, тому ці числа можна обрати не більше, ніж $(n+1)^m$ способами. Далі, сума чисел $x_{m+1},\ldots,x_n$ не більша за m. Справді, інакше

$$x_1+2x_2+\ldots+nx_n \geq (m+1)(x_{m+1}+\ldots+x_n) \geq (m+1)^2 > n.$$

Отже, кожному способу обрати ці числа можна співставити яку-небудь функцію з $\{1,\ldots,m\}$ в $\{m+1,\ldots,n,n+1\}$, яка набуває значення k у x_k точках, $m+1 \leq k \leq n$, та значення $n+1$ у $m-(x_{m+1}+\ldots+x_n)$ точках. Зрозуміло, що різним виборам чисел $x_{m+1},\ldots,x_n$ відповідатимуть різні функції, тому кількість способів зробити вибір не більша за $(n-m+1)^m \leq n^m$. Таким чином, загальна кількість розв'язків

$$p(n) \leq (n+1)^m n^m \leq (n+1)^{2m} \leq \exp\bigl(2\sqrt{n}\ln(n+1)\bigr) = O(e^{\varepsilon n}),\ n\to\infty,$$

при всіх $\varepsilon>0$. Таким чином, $p(n)=O(\alpha^n)$, $n\to\infty$, при всіх $\alpha>1$.

6. При $x=y=0$ маємо $f(0)=0$. При $x=0$ дістанемо $f(-y)=f(y)$ для всіх $y\in\mathbb{R}$, тобто f — парна функція. Покладемо $y=nx$ і отримаємо

$$f\bigl((n+1)x\bigr)=2f(x)+2f(nx)-f\bigl((n-1)x\bigr),\ n\in\mathbb{N},$$

звідки індукцією за $n\geq 1$ легко встановити, що $f(nx)=n^2f(x)$ для всіх $x\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$. Тепер для довільних $x\in\mathbb{R}$ та $n,k\in\mathbb{N}$ маємо $f(nx)=k^2f(\frac{n}{k}x)=n^2f(x)$, звідки $f(\frac{n}{k}x)=(\frac{n}{k})^2f(x)$. Враховуючи парність f, дістаємо, що

$$f(rx)=r^2f(x),\ x\in\mathbb{R}, r\in\mathbb{Q}.$$

Для довільного $x\neq 0$ розглянемо послідовність раціональних чисел $\{r_n\}$, яка збігається до $\frac{1}{x}$. Тоді

$$f(r_nx)=r_n^2f(x)\to \tfrac{1}{x^2}f(x),\ n\to\infty.$$

Проте f неперервна в точці 1, тому $f(r_nx)\to f(1)$, $n\to\infty$. Отже, $\frac{1}{x}f(x)=f(1)$, тобто $f(x)=x^2f(1)$ при всіх $x\neq 0$. При $x=0$ остання рівність теж очевидно виконується. Таким чином, $f(x)=ax^2$, $x\in\mathbb{R}$, де $a=f(1)$. Залишилось зробити перевірку.

Відповідь: $f(x)=ax^2$, $x\in\mathbb{R}$, де $a\in\mathbb{R}$ довільне.

7. Покладемо $b_n=\sqrt{2(a_n^2-1)}$, тоді $b_1=0$ та $a_{n+1}=3a_n+2b_n$, $n\geq 1$. Перевіримо, що $b_{n+1}=4a_n+3b_n$, $n\geq 1$. Справді, $a_n,b_n\geq 0$, причому

$$b_{n+1}^2=2a_{n+1}^2-2=2(3a_n+2b_n)^2-2a_n^2+b_n^2=16a_n^2+9b_n^2+24a_nb_n=(4a_n+3b_n)^2.$$

Таким чином,

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ та } \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}, \ n \geq 1,$$

звідки усі числа a_n та b_n, $n \geq 2$, є натуральними.

Зафіксуємо довільне $n \geq 1$ та розглянемо матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = A^n = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$. Тоді

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} a_{2n+1} \\ b_{2n+1} \end{pmatrix} = A^{2n} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = B^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

звідки $a_{n+1} = p$, $a_{2n+1} = p^2 + qr$. Залишилось зауважити, що

$$\det B = ps - qr = (\det A)^n = 1,$$

тому p та qr взаємно прості, а отже a_{n+1} та a_{2n+1} теж взаємно прості.

Зауваження. Можна показати, що $a_{n+2} = 6a_{n+1} - a_n$, $n \geq 1$. Характеристичне рівняння $\lambda^2 = 6\lambda - 1$ має корені $3 \pm \sqrt{8}$, тому $a_n = \alpha(3-\sqrt{8})^n + \beta(3+\sqrt{8})^n$, де α, β визначаються з початкових умов $a_1 = 1, a_2 = 3$. Тоді

$$a_n = \tfrac{1}{2}\big((3-\sqrt{8})^{n-1} + (3+\sqrt{8})^{n-1}\big), \ n \geq 1.$$

Тепер неважко перевірити, що $a_{2n+1} = 2a_{n+1}^2 - 1$, а отже a_{n+1} та a_{2n+1} взаємно прості.

8. Побудуємо шукані матриці. Покладемо $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $\det A = \sqrt{\frac{3}{2}} > 1$. Знайдемо, для яких векторів $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ виконується нерівність $\|Ax\| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\|x\|$. Ця нерівність рівносильна такій:

$$3x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 \leq \frac{3}{4}(x_1^2 + x_2^2), \text{ або } |x_1| \leq \frac{1}{3}|x_2|. \qquad (*)$$

Нерівності $(*)$ відповідає заштрихована множина на рис. 2. Оскільки $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{3}$, то $\operatorname{tg}\varphi = \frac{3}{4}$, звідки $\varphi > \frac{\pi}{6}$.
Покладемо

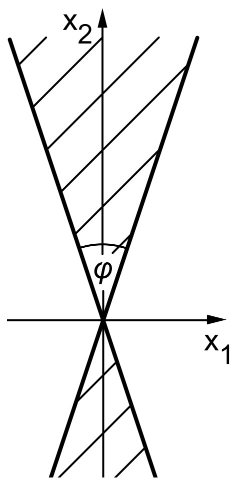

Рис. 2.

$$B = (1+\varepsilon)\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \ \det B = (1+\varepsilon)^2 > 1,$$

де $\varepsilon > 0$ підберемо так, що $(1+\varepsilon)^5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \leq 1$. Покажемо, що матриці A, B задовольняють умову задачі.

Для довільного фіксованого $u_0 \in \mathbb{R}^2$ визначимо послідовність векторів u_i, $i \geq 1$, таким чином: $u_i = M_i u_{i-1}$, причому якщо u_{i-1} потрапляє в заштриховану множину, то $M_i = A$, інакше $M_i = B$. Нехай $i_0 = 0$ та $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k < \ldots$ — послідовність номерів, для яких $M_i = A$. Вектор Bx утворюється з вектора x поворотом на кут φ

проти годинникової стрілки з подальшим розтягом у $1+\varepsilon$ разів. Тоді для кожного $x \in \mathbb{R}^2$ хоча б один з векторів $x, Bx, B^2x, \ldots, B^5x$ потрапляє в заштриховану на рис. 2 множину. Отже, $i_1 \le 5, i_2 - i_1 \le 5, i_3 - i_2 \le 5, \ldots$ Тоді внаслідок нерівності $(1+\varepsilon)^5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \le 1$ дістанемо $\|u_0\| \ge \|u_{i_1}\| \ge \|u_{i_2}\| \ge \|u_{i_3}\| \ge \ldots$, а при $i_k < i \le i_{k+1}$, $k \ge 0$, маємо

$$\|u_i\| \le (1+\varepsilon)^5 \|u_{i_k}\| \le (1+\varepsilon)^5 \|u_0\|.$$

Відповідь: так, існують.

9. Позначимо $a_{n,k} = \dfrac{1}{n-k} \sum\limits_{j=k}^{n} \dfrac{n-j}{j}, 1 \le k \le n-1$. Маємо $a_{n,1} > \dfrac{1}{n-1} \cdot \dfrac{n-1}{1} = 1$, $a_{n,n-1} = \dfrac{1}{n-1} < 1$, тому номер k^* існує, причому $2 \le k^* \le n-1$. Зауважимо, що

$$a_{n,k^*} \le 1 < a_{n,k^*-1}. \tag{1}$$

Далі,

$$a_{n,k} = \frac{1}{1-\frac{k}{n}} \cdot \frac{1}{n} \sum_{j: \frac{k}{n} \le \frac{j}{n} \le 1} \left(\frac{1}{j/n} - 1 \right). \tag{2}$$

Покажемо, що послідовність $\left\{ \dfrac{k^*(n)}{n} \right\}$ має єдину граничну точку. Розглянемо довільну підпослідовність номерів $\{n'\}$, для якої $\dfrac{k^*(n')}{n'} \to x \in [0,1]$, $n' \to \infty$. Зауважимо, що тоді також $\dfrac{k^*(n')-1}{n'} \to x$, $n' \to \infty$. Дослідимо поведінку виразу (2) при $n \to \infty$ за умови, що n пробігає послідовність $\{n'\}$.

а) Нехай $x = 0$. Тоді

$$a_{n,k^*} \sim \frac{1}{n} \sum_{j: \frac{k^*}{n} \le \frac{j}{n} \le 1} \left(\frac{1}{j/n} - 1 \right), \ n \to \infty.$$

Звідси для довільного $\varepsilon \in (0,1)$ маємо $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_{n,k^*} \ge \int\limits_{\varepsilon}^{1} \left(\dfrac{1}{t} - 1 \right) dt \to \infty$, $\varepsilon \to 0+$. Але з (1) випливає, що $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_{n,k^*} \le 1$, суперечність. Тому $x \ne 0$.

б) Нехай $x = 1$. Тоді

$$a_{n,k^*} \le \frac{1}{n-k^*} \cdot (n-k^*) \cdot \max_{k^* \le j \le n-1} \frac{n-j}{j} = \frac{n-k^*}{k^*} \to 0.$$

Аналогічно $a_{n,k^*-1} \to 0$, що суперечить (1), тому $x \ne 1$. Отже, $0 < x < 1$.

в) При $0 < x < 1$ маємо

$$a_{n,k^*} \to \frac{1}{1-x} \int\limits_x^1 \left(\frac{1}{t} - 1 \right) dt = \frac{-\ln x + x - 1}{1-x}, \ n \to \infty.$$

До цієї ж границі прямує і a_{n,k^*-1}, тому з (1) дістаємо, що $\dfrac{-\ln x + x - 1}{1-x} = 1$, або $2x - 2 - \ln x = 0$. Дослідимо функцію $f(x) = 2x - 2 - \ln x = 0$ на проміжку $(0,1]$. Маємо $f(1) = 0$, $f(0+) = +\infty$, $f'(x) = 2 - \frac{1}{x} = 0$ при $x = \frac{1}{2}$, f спадає на $(0, \frac{1}{2}]$ та зростає на $[\frac{1}{2}, 1]$. Тому $f(\frac{1}{2}) < f(1) = 0$ і на проміжку $(0, \frac{1}{2})$ функція f має єдиний нуль x_0. Таким чином, x_0 — єдина гранична точка послідовності $\left\{\dfrac{k^*(n)}{n}\right\}$, а тому $\dfrac{k^*(n)}{n} \to x_0, n \to \infty$.

3–5 курси

1. Нехай $x_1, x_2 \in X$, $y_1, y_2 \in Y$, $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$. Розглянемо неперервну за сукупністю змінних функцію

$$f(x,y) = \rho(x, x_1)\sigma(y, y_1),\ x \in X, y \in Y.$$

Припустимо, що $f(x,y) = g(x) + h(y)$ для всіх $x \in X, y \in Y$. При $y = y_1$ дістанемо $f(x, y_1) \equiv 0$, звідки $g(x) \equiv -h(y_1)$. Аналогічно при $x = x_1$ дістанемо $h(y) \equiv -g(x_1)$. Отже, $f(x,y) \equiv -h(y_1) - g(x_1) = \text{const}$. Проте $f(x_1, y_1) = \rho(x_1, x_1)\sigma(y_1, y_1) = 0$, $f(x_2, y_2) = \rho(x_2, x_1)\sigma(y_2, y_1) > 0$, суперечність.

Відповідь: завжди.

2. Ліва частина дорівнює

$$\begin{aligned}\mathsf{M}u(\xi+\eta)I_{\{\xi\neq 0,\eta\neq 0\}} &+ \mathsf{M}u(\xi+\eta)I_{\{\xi=0,\eta\neq 0\}} + \mathsf{M}u(\xi+\eta)I_{\{\xi\neq 0,\eta=0\}} + \mathsf{M}u(\xi+\eta)I_{\{\xi=\eta=0\}} = \\ &= \mathsf{M}u(\eta)I_{\{\xi=0,\eta\neq 0\}} + \mathsf{M}u(\xi)I_{\{\xi\neq 0,\eta=0\}} + u(0)\mathsf{P}\{\xi=\eta=0\} = \\ &= \mathsf{M}u(\eta)I_{\{\eta\neq 0\}} + \mathsf{M}u(\xi)I_{\{\xi\neq 0\}} + u(0)\mathsf{P}\{\xi=\eta=0\} = \\ &= \mathsf{M}u(\eta) + \mathsf{M}u(\xi) - u(0)\mathsf{P}\{\eta=0\} - u(0)\mathsf{P}\{\xi=0\} + u(0)\mathsf{P}\{\xi=\eta=0\}.\end{aligned}$$

Залишилось зауважити, що

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\{\eta=0\} &+ \mathsf{P}\{\xi=0\} - \mathsf{P}\{\xi=\eta=0\} = \\ &= \mathsf{P}\{\eta=0\} + \mathsf{P}\{\xi=0,\eta\neq 0\} = \mathsf{P}\{\eta=0\} + \mathsf{P}\{\eta\neq 0\} = 1.\end{aligned}$$

3. Метод варіації довільної сталої дозволяє записати загальний розв'язок рівняння:

$$x(t) = ce^{-at} + e^{-at}\int_0^t e^{au}f(u)\,du,\ t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

де c — довільна стала. Покладемо $f_\infty = \lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$.

а) При $a > 0$ перший доданок у правій частині (1) прямує до нуля при $t \to +\infty$, а до другого доданку можна застосувати правило Лопіталя (адже $e^{at} \to +\infty, t \to \infty$):

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{e^{at}}\int_0^t e^{au}f(u)\,du = \lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{d}{dt}\int\limits_0^t e^{au}f(u)\,du}{\frac{d}{dt}e^{at}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{e^{at}f(t)}{ae^{at}} = \frac{f_\infty}{a}$$

(при обчисленні похідної від інтеграла ми скористалися неперервністю функції f). Отже, загальний розв'язок (1) прямує до $\frac{f_\infty}{a}$.

Відповідь: границя дорівнює $a^{-1} \lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$.

б) При $a < 0$ покладемо $a = -\omega$, $\omega > 0$. Загальний розв'язок запишеться у вигляді

$$x(t) = ce^{\omega t} + e^{\omega t} \int\limits_0^t e^{-\omega u} f(u)\, du,\ t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Неперервна функція f обмежена на $[0, +\infty)$, тому невласний інтеграл $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(u)e^{-\omega u}\, du$ збігається абсолютно. Перепишемо (2) у вигляді

$$x(t) = \left(c + \int\limits_0^\infty e^{-\omega u} f(u)\, du\right) e^{\omega t} - \frac{1}{e^{-\omega t}} \int\limits_t^{+\infty} e^{-\omega u} f(u)\, du,\ t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

При $t \to +\infty$ маємо у другому доданку невизначеність $\frac{0}{0}$. За правилом Лопіталя отримуємо

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{e^{-\omega t}} \int\limits_t^{+\infty} e^{-\omega u} f(u)\, du = \lim_{t\to+\infty} \frac{-e^{-\omega t} f(t)}{-\omega e^{-\omega t}} = \frac{f_\infty}{\omega}.$$

Тому розв'язок (3) має скінченну границю при $t \to +\infty$ лише при $c = -\int\limits_0^{+\infty} e^{-\omega u} f(u)\, du$. Ця границя дорівнює $-\frac{f_\infty}{\omega} = \frac{f_\infty}{a}$, тобто незалежно від знаку параметра a шукана скінченна границя задається виразом $\frac{f_\infty}{a}$.

4. Оскільки $A^2 = 0$, то 0 є єдиним власним числом A (кратності 3). Крім того, в жордановій формі A не може бути блоку $J_3(0)$, тобто всі блоки рівні $J_2(0)$ або $J_1(0)$. Звідси випливає, що $\mathrm{rk}(A) \le 1$. Аналогічно $\mathrm{rk}(B) \le 1$. Тому $\mathrm{rk}(A+B) \le 2$, а отже 0 є власним значенням $A + B$. Крім того, $\mathrm{tr}(A + B) = 0$, тобто сума всіх власних значень $A+B$ з урахуванням кратностей дорівнює 0. Тому множина власних значень матриці $A+B$ має вигляд $\{0, \lambda, -\lambda\}$ для деякого $\lambda \in \mathbb{C}$. Кожна така множина справді є набором власних значень матриці $A + B$ для матриць

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus (0), \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} \oplus (0).$$

Відповідь: $\{0, \lambda, -\lambda\}$, де $\lambda \in \mathbb{C}$ довільне.

5. Доведемо, що $g_n \xrightarrow{\lambda} 0, n \to \infty$. Припустимо, що це не так. Тоді існують такі послідовність $n_k \to \infty$ та число $\varepsilon > 0$, що $\lambda(\{g_{n_k} \ge \varepsilon\}) \ge \varepsilon > 0$. Функція $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$ зростає на $[0, +\infty)$ (справді, $f'(x) = \frac{x^2+2x}{(1+x)^2} > 0$), тому

$$\int_X \frac{g_{n_k}^2}{1 + g_{n_k}} \mathrm{d}\lambda \ge \varepsilon \cdot \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon} \not\to 0,\ n_k \to \infty,$$

суперечність.

Тоді $\int\limits_X g_n I_{\{g_n<1\}} \mathrm{d}\lambda \to 0,\ n \to \infty$, за теоремою Лебега про мажоровану збіжність (з мажорантою 1), а $\int\limits_X g_n I_{\{g_n \geq 1\}} \mathrm{d}\lambda \to 0,\ n \to \infty$, оскільки на множині $\{x \,|\, g_n(x) \geq 1\}$ маємо $g_n \leq \frac{2g_n^2}{1+g_n}$.

6. Нехай $a \in [0,1]$ та $e_0, e_1, \ldots$ — ортонормований базис в l_2. Тоді умову задачі задовольняють вектори $v_k = \sqrt{a} e_0 + \sqrt{1-a} e_k$, $k \geq 1$.

Навпаки, нехай існують вектори v_k, $k \geq 1$, що задовольняють умову задачі. Доведемо, що $a \in [0,1]$. Нехай $a = x + iy$, де $x, y \in \mathbb{R}$. За нерівністю Коші-Буняковського

$$|(v_1 + \ldots + v_n, v_{n+1} + \ldots + v_{2n})| \leq \|v_1 + \ldots + v_n\| \cdot \|v_{n+1} + \ldots + v_{2n}\|.$$

Маємо

$$\|v_1 + \ldots + v_n\|^2 = \sum_{k=1}^n \|v_k\|^2 + 2 \sum_{k<l} \mathrm{Re}(v_k, v_l) = n + n(n-1)x.$$

Аналогічно $\|v_{n+1} + \ldots + v_{2n}\|^2 = n + n(n-1)x$. Тому $n^2 |x+iy| \leq n + n(n-1)x$, тобто $\sqrt{x^2+y^2} \leq \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}x$. При $n \to \infty$ звідси дістанемо $\sqrt{x^2+y^2} \leq x$, а отже $x \geq 0$ та $y = 0$. Таким чином, $a = x$. З $|(v_1, v_2)| \leq 1$ випливає, що $x \leq 1$.

Відповідь: $a \in [0,1]$.

7. Доведення розіб'ємо на декілька кроків.

1) Як і в розв'язанні задачі **6** для 1–2 курсів дістаємо, що $f(0) = 0$ та f — парна функція.

2) Доведемо, що при всіх $x, y \in \mathbb{R}$ та $n \in \mathbb{Z}$

$$f(nx+y) = n^2 f(x) + n\Delta + f(y), \quad \text{де} \quad \Delta = \Delta(x,y) = f(x+y) - f(x) - f(y). \qquad (*)$$

При $n = 0$ та $n = 1$ ця рівність є очевидною. Далі,

$$f(kx+y+x) + f(kx+y-x) = 2f(kx+y) + 2f(x).$$

Таким чином, якщо $(*)$ має місце при $n = k-1$ та $n = k$, то

$$\begin{aligned} f\big((k+1)x+y\big) =& 2f(kx+y) + 2f(x) - f\big((k-1)x+y\big) = \\ =& \big(2k^2 + 2 - (k-1)^2\big) f(x) + \big(2k - (k-1)\big)\Delta + (2-1)f(y) = \\ =& (k+1)^2 f(x) + (k+1)\Delta + f(y), \end{aligned}$$

тобто $(*)$ справджується і для $n = k+1$. Аналогічно якщо $(*)$ має місце при $n = k$ та $n = k+1$, то $(*)$ справджується і для $n = k-1$. Тому за принципом математичної індукції $(*)$ має місце при всіх $n \in \mathbb{Z}$.

3) При $y = 0$ з $(*)$ дістаємо, що $f(nx) = n^2 f(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Тому при всіх $x, y \in \mathbb{R}$ та $n \in \mathbb{Z}$ маємо

$$\begin{aligned} \Delta(nx, y) =& f(nx+y) - f(nx) - f(y) = \\ =& n^2 f(x) + n\Delta(x,y) + f(y) - n^2 f(x) - f(y) = n\Delta(x,y). \end{aligned}$$

4) З пунктів 2) та 3) випливає, що

$$f(qx+y) = q^2 f(x) + q\Delta(x,y) + f(y)$$

для $x, y \in \mathbb{R}$ та $q \in \mathbb{Q}$. Справді, якщо $q = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, то

$$f\big(\tfrac{m}{n}x + y\big) = m^2 f\big(\tfrac{x}{n}\big) + m\Delta\big(\tfrac{x}{n}, y\big) + f(y) = \tfrac{m^2}{n^2} f(x) + \tfrac{m}{n}\Delta(x,y) + f(y).$$

5) Для доведення твердження задачі достатньо встановити, що

$$\frac{f(x+y)}{x+y} = \frac{f(x)}{x} + \frac{f(y)}{y} \ \text{ при всіх } \ x \neq 0,\ y \neq 0,\ x+y \neq 0. \qquad (**)$$

Для цього побудуємо таку послідовність $\{q_n,\ n \geq 1\} \subset \mathbb{Q}$, що $q_n \to -\frac{y}{x}$, $n \to \infty$. Тоді

$$f(q_n x + y) = q_n^2 f(x) + q_n\big(f(x+y) - f(x) - f(y)\big) + f(y).$$

З останньої рівності внаслідок неперервності f в точці 0 при $n \to \infty$ отримаємо

$$0 = \frac{y^2}{x^2} f(x) - \frac{y}{x}\big(f(x+y) - f(x) - f(y)\big) + f(y), \ \text{ або } \ \frac{(x+y)y}{x^2} f(x) + \frac{x+y}{x} f(y) = \frac{y}{x} f(x+y).$$

Звідси випливає $(**)$.

Зауваження. Насправді з умови задачі випливає, що $f(x) \equiv ax^2$, $x \in \mathbb{R}$, для якого $a \in \mathbb{R}$. Розглянемо функцію φ з твердження задачі. Для неї $\varphi(x+y) \equiv \varphi(x) + \varphi(y)$. Тоді або $\varphi(x) = ax$, де $a \in \mathbb{R}$ фіксоване, або φ має скрізь щільний графік в $\mathbb{R}^2$. Але $f(x) = x\varphi(x), x \in \mathbb{R}$. Якщо $\varphi(x) = ax$, то $f(x) = ax^2$. Якщо ж графік φ скрізь щільний в $\mathbb{R}^2$, то f розривна в нулі та дістаємо суперечність з умовою. Справді, якби f була неперервною в нулі, то існувало б таке $\delta > 0$, що $|f(x)| \leq 1$ для всіх $x \in (-\delta, \delta)$. Звідси $|\varphi(x)| \leq \frac{1}{|x|}, x \neq 0, |x| < \delta$, та графік φ не є скрізь щільним.