Відкрита студентська олімпіада механіко-математичного факультету

В.Б. Брайман, О.Г. Кукуш, Д.Ю. Мітін

Чергове математичне змагання студентів Київського університету було проведено 21 лютого 2011 року. Традиційно до участі запрошувались представники інших вузів. Як завжди, окремо змагалися студенти I–II та III–IV курсів. Далі ми наводимо прізвища переможців, умови та розв'язки запропонованих задач.

Переможці олімпіади серед студентів I–II курсів.

I місце

Веклич Богдан Васильович (мех-мат ф-т КНУ, 1 курс)
Сенін Віталій Ігорович (мех-мат ф-т КНУ, 2 курс)

II місце

Чорний Максим Володимирович (мех-мат ф-т КНУ, 1 курс)
Власюк Олександр Васильович (мех-мат ф-т КНУ, 2 курс)

III місце

Свідерський Кирило Сергійович (мех-мат ф-т КНУ, 2 курс)
Макаров Микита Миколайович (мех-мат ф-т КНУ, 2 курс)
Мокеєв Євген Максимович (мех-мат ф-т КНУ, 1 курс)
Павлик Богдан Андрійович (мех-мат ф-т КНУ, 2 курс)

Переможці олімпіади серед студентів III–IV курсів.

I місце

Македонський Євген Олександрович (мех-мат ф-т КНУ, 4 курс)
Шамов Олександр Олександрович (мех-мат ф-т КНУ, 4 курс)

II місце

Арман Андрій Романович (мех-мат ф-т КНУ, 4 курс)
Білокопитов Євген Олександрович (мех-мат ф-т КНУ, 4 курс)
Семікіна Юлія Сергіївна (мех-мат ф-т КНУ, 3 курс)

III місце

Цатурян Сергій Рашидович (мех-мат ф-т КНУ, 4 курс)
Коротков Андрій Сергійович (ф-т кібернетики КНУ, 4 курс)
Бедзір Олександр Олександрович (ф-т кібернетики КНУ, 4 курс)

Завдання для 1–2 курсів

1. Чи існують дві різні строго опуклі вниз функції, визначені на $[0,1]$, графіки яких мають зліченну множину точок перетину? (О.Н. Нестеренко)

2. Нехай $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — n разів неперервно диференційовне бієктивне відображення. Довести, що існує єдина неперервна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ така, що φ задовольняє рівняння $x^{(n)} = f(x)$. (І.О. Парасюк)

3. Для кожного n знайти всі симетричні матриці $n \times n$, елементами яких є лише 0 та 1, а всі власні значення яких є додатними. (А.В. Бондаренко)

4. Позначимо через $e(P, Q, R)$ еліпс з фокусами P та Q, що проходить через точку R. Знайти усі трикутники ABC, для яких еліпси $e(A, B, C)$, $e(B, C, A)$ та $e(C, A, B)$ мають спільну точку. (В.Б. Брайман)

5. Розв'язати рівняння $9^x + 4^x + 2^x = 8^x + 6^x + 1$. (В.Б. Брайман)

6. Нехай $x_n = x_{n-1} - x_{n-1}^2$, $n \geq 2$, $x_1 \in (0, 1)$. Обчислити границю

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 x_n - n}{\ln n}.$$

(Д. Ю. Мітін)

7. Функцію $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ назвемо n-позитивною, якщо для довільних n дійсних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ таких, що $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq 0$, має місце нерівність

$$\frac{1}{n}\big(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)\big) \geq f(0).$$

Чи існує неперервна 2010-позитивна функція f, яка не є 2011-позитивною?

(В.Б. Брайман)

8. Нехай

$$a_n = \frac{1}{2^{n/2}\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n} \sqrt{C_n^k}.$$

Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. (В.К. Безбородов)

Завдання для 3–4 курсів

1. Нехай ξ, η — такі випадкові величини, що $\xi + \eta$ однаково розподілено з ξ, причому $\eta \geq 0$ м.н. Довести, що $\eta = 0$ м.н. (О.Г. Кукуш)

2. Див. задачу **3** для 1-2 курсів.

3. На деякому просторі X з мірою λ задано функції $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ такі, що

$$\big(f_n(x)\big)^{2011} \xrightarrow{\lambda} \big(f(x)\big)^{2011}, \quad n \to \infty.$$

Довести, що $f_n(x) \xrightarrow{\lambda} f(x)$, $n \to \infty$. (В.М. Радченко)

4. Скільки існує з точністю до ізоморфізму кілець на 2011-елементній множині?

(С.В. Слободянюк)

5. Нехай

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n} \sqrt{C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}, \quad 0 < p < 1.$$

Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. (В.К. Безбородов)

6. Нехай $x_1, \ldots, x_n \geq 0$, $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. Чи існують матриці $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ такі, що $A_i^2 = A_i$, $A_i A_j = 0$, $i \neq j$, $(A_i)_{11} = x_i$? (Я.В. Журба)

7. Нехай ξ_1, ξ_2, ξ_3 — випадкові величини зі щільністю розподілу $2x$, $x \in [0,1]$. Знайти $f(K) = \min \mathsf{M}(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 - K)_+, K \geq 0$. Тут $t_+ = \max(t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$, а мінімум береться за усіма можливими сумісними розподілами величин ξ_1, ξ_2, ξ_3. (В.Б. Брайман)

8. Нехай (X, d) — компактний метричний простір та T — неперервне відображення з простору X в себе. Відомо, що для всіх $x, y \in X$ з умови $\frac{1}{2}d(x, Tx) < d(x, y)$ випливає, що $d(Tx, Ty) < d(x, y)$. Довести, що T має єдину нерухому точку. (М.С. Вязовська)

Розв'язки та вказівки

1–2 курси

1. Нехай $f_1(x) = x^2, f_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 + g(x)),\ x \in [0,1]$, де функцію g задано таким чином: $g(0) = 0,\ g\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2},\ n \geq 1$ та g є лінійною на проміжках $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right],\ n \geq 1$. Неважко перевірити, що g опукла вниз, а тому f_1 та f_2 строго опуклі вниз та задовольняють умову задачі.

Відповідь: так, існують.

2. Оскільки існує неперервне обернене відображення $\varphi^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, то рівність $\varphi^{(n)}(t) = f(\varphi(t)),\ t \in \mathbb{R}$, виконується для єдиної неперервної функції $f(t) = \varphi^{(n)}(\varphi^{-1}(t))$.

3. *I спосіб.* Зауважимо, що симетрична матриця завжди має власний базис. Нехай $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ — власні числа матриці A. Тоді $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = \det A \geq 1$, бо визначник матриці A є цілим та додатним. З іншого боку, $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = \operatorname{tr} A \leq n$. За нерівністю Коші

$$1 \geq \frac{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n}{n} \geq \sqrt[n]{\lambda_1 \ldots \lambda_n} \geq 1.$$

Отже, у нерівності Коші досягається рівність, звідки $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 1$ та A — одинична матриця.

II спосіб. Покажемо, що матриця A діагональна. Справді, припустимо, що при деяких $i \neq j$ маємо $a_{ij} \neq 0$. Розглянемо вектор $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{e_i} - \overrightarrow{e_j}$, де $\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}$ — стандартний базис в $\mathbb{R}^n$. Тоді $\overrightarrow{v}^{\mathrm{T}} A \overrightarrow{v} = a_{ii} + a_{jj} - 2 \leq 0$, суперечність, бо матриця A є додатно визначеною. Оскільки власні числа матриці A додатні, то на її діагоналі немає нулів та остаточно A — одинична матриця.

4. Нехай D — спільна точка еліпсів $e(A, B, C)$, $e(B, C, A)$ та $e(C, A, B)$. Тоді

$$\begin{cases} AD + BD = AC + BC, \\ BD + CD = AB + AC, \\ AD + CD = AB + BC, \end{cases}$$

звідки $AD = BC, BD = AC, CD = AB$. Отже, $\triangle ABC = \triangle DCB = \triangle CDA = \triangle BAD$ за трьома сторонами. Нехай $A_0B_0C_0$ — трикутник, для якого AB, BC, AC є середніми лініями. Тоді внаслідок отриманих рівностей D або є однією з вершин трикутника $A_0B_0C_0$, або одночасно належить усім його сторонам, що неможливо. Нехай для визначеності $D = B_0$. Тоді $ABCD$ — паралелограм з рівними діагоналями, тобто прямокутник, звідки $\angle ABC = 90°$. З іншого боку, якщо ABC — прямокутний трикутник

($\angle ABC = 90^\circ$), то кожен з еліпсів $e(A, B, C)$, $e(B, C, A)$ та $e(C, A, B)$ очевидно проходить через вершину D прямокутника $ABCD$, яка є симетричною до C відносно серединного перпендикуляра до AB, симетричною до A відносно серединного перпендикуляра до BC та симетричною до B відносно середини AC.

Відповідь: ABC — довільний прямокутний трикутник.

5. Легко перевірити, що $x = 0$, $x = 1$ та $x = 2$ задовольняють рівняння. Покажемо, що інших коренів немає. Розглянемо функцію $f(x) = 9^x + 4^x + 2^x - 8^x - 6^x - 1$ та припустимо, що вона має принаймні 4 корені. За теоремою Ролля якщо функція $g(x)$ має n коренів $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, то функція $D_a g(x) := a^x(g(x)a^{-x})'$ має принаймні $n-1$ корінь $y_1, \ldots, y_{n-1}$, де $x_1 < y_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < y_{n-1} < x_n$.

Тому функція $D_8 D_6 D_1 f(x)$ повинна мати хоча б один корінь. Проте

$$D_8 D_6 D_1 f(x) = \ln\frac{9}{8} \cdot \ln\frac{9}{6} \cdot \ln 9 \cdot 9^x + \ln\frac{4}{8} \cdot \ln\frac{4}{6} \cdot \ln 4 \cdot 4^x + \ln\frac{2}{8} \cdot \ln\frac{2}{6} \cdot \ln 2 \cdot 2^x$$

очевидно набуває лише додатних значень, суперечність.

Відповідь: $0, 1, 2$.

6. За теоремою про монотонну обмежену послідовність легко показати, що $x_n \to 0$, $n \to \infty$.

Спочатку за теоремою Штольца дістанемо

$$nx_n = \frac{n}{\frac{1}{x_n}} \sim \frac{1}{\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n-1}}} = \frac{x_{n-1}x_n}{x_{n-1} - x_n} = \frac{x_{n-1}(x_{n-1} - x_{n-1}^2)}{x_{n-1}^2} = 1 - x_{n-1} \to 1,\ n \to \infty.$$

Далі ще раз застосуємо теорему Штольца, правильно переписавши допграничний вираз:

$$\frac{n^2 x_n - n}{\ln n} = \frac{nx_n \cdot (n - \frac{1}{x_n})}{\ln n} \sim \frac{n - \frac{1}{x_n}}{\ln n} \sim \frac{1 - \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_{n-1}}}{\ln n - \ln(n-1)} = \frac{1 - \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_{n-1}}}{-\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)} \sim$$
$$\sim n\left(1 - \frac{1}{x_{n-1} - x_{n-1}^2} + \frac{1}{x_{n-1}}\right) = -\frac{nx_{n-1}}{1 - x_{n-1}} \to -1, \quad n \to \infty.$$

Відповідь: -1.

7. Розглянемо $f(x) = \begin{cases} -1, & x < -1; \\ x, & -1 \le x < 2009; \\ 2009, & x \ge 2009 \end{cases}$ та перевіримо, що f є 2010-*позитивною*.

Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_{2010}$ є такими, що $x_1 + x_2 + \ldots + x_{2010} \ge 0$. Зауважимо, що f є опуклою на $(-\infty, 2009]$. Якщо усі $x_i \le 2009$, то за нерівністю Іенсена

$$\frac{1}{2010}\big(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{2010})\big) \ge f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{2010}}{2010}\right) \ge f(0).$$

Якщо існує деяке $x_i \ge 2009$, то

$$\frac{1}{2010}\big(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{2008})\big) \ge \frac{1}{2010}\big(2009 + 2009 \cdot (-1)\big) \ge 0 = f(0).$$

З іншого боку при $x_1 = \ldots = x_{2010} = -1$ та $x_{2011} = 2010$ маємо $x_1 + \ldots + x_{2011} = 0$, але

$$\frac{1}{2011}\big(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{2011})\big) = -\frac{1}{2011} < 0 = f(0).$$

Отже, f не є 2011-*позитивною.*

8. Покажемо, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n} \sqrt{C_n^k p^k (1-p)^{n-k}} = 0$$

при довільному $0 < p < 1$ (зокрема при $p = \frac{1}{2}$ отримуємо послідовність $\{a_n\}$ з умови задачі).

Зафіксуємо $0 < \delta < 1$ та розглянемо окремо множини індексів

$$\{0 \le k \le n : |k - np| \le \delta n\} \quad \text{та} \quad \{0 \le k \le n : |k - np| > \delta n\}.$$

Враховуючи, що існує щонайбільше $2\delta n{+}1$ цілих значень k, при яких $|k - np| \le \delta n$, за нерівністю між середнім арифметичним та середнім квадратичним дістаємо

$$\left(\sum_{|k-np|\le\delta n} \sqrt{C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}\right)^2 \le (2\delta n + 1) \sum_{|k-np|\le\delta n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \le 2\delta n + 1.$$

Знову за нерівністю між середнім арифметичним та середнім квадратичним маємо

$$\left(\sum_{|k-np|>\delta n} \sqrt{C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}\right)^2 \le n \sum_{|k-np|>\delta n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= n \sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|>\delta} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} < \frac{n}{\delta^2} \sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|>\varepsilon} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \left(\tfrac{k}{n} - p\right)^2 \le$$

$$\le \frac{n}{\delta^2} \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \left(\tfrac{k}{n} - p\right)^2 = \frac{p(1-p)}{\delta^2}.$$

Остання рівність є наслідком відомих тотожностей

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = 1,\ \sum_{k=0}^{n} k C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = np,\ \sum_{k=0}^{n} k(k-1) C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = n(n-1)p^2.$$

Отже,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n} \sqrt{C_n^k p^k (1-p)^{n-k}} \le \sqrt{\frac{2\delta n + 1}{n}} + \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\delta\sqrt{n}} \le \sqrt{2\delta} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\delta\sqrt{n}}.$$

Залишилось зауважити, що для довільного $\varepsilon > 0$ можна обрати $\delta > 0$ так, що $\sqrt{2\delta} < \frac{\varepsilon}{3}$ та $N \ge 1$ так, що при всіх $n \ge N$ маємо $\frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{\varepsilon}{3}$, $\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\delta\sqrt{n}} < \frac{\varepsilon}{3}$.

Відповідь: 0.

3–4 курси

1. Маємо
$$\operatorname{arctg}(\xi+\eta) \geq \operatorname{arctg}\xi \ \text{ м.н.}, \qquad (*)$$
тому $\mathsf{M}\operatorname{arctg}(\xi+\eta) \geq \mathsf{M}\operatorname{arctg}\xi$ (математичні сподівання існують, бо $\operatorname{arctg} x$ — обмежена функція). Але $\xi+\eta$ однаково розподілено з ξ, тому насправді в цій нерівності досягається рівність. З огляду на нерівність $(*)$ маємо $\operatorname{arctg}(\xi+\eta) = \operatorname{arctg}\xi$ м.н., звідки $\xi+\eta=\xi$ м.н. та $\eta=0$ м.н.

2. Див. задачу **3** для 1-2 курсів.

3. Зауважимо, що якщо $g_n(x) \xrightarrow{\lambda} g(x)$, $n\to\infty$, а функція $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ є рівномірно неперервною на $\mathbb{R}$, то $\varphi(g_n(x)) \xrightarrow{\lambda} \varphi(g(x))$, $n\to\infty$. Справді, нехай задано $\varepsilon>0$. Існує таке $\delta=\delta(\varepsilon)$, при якому з нерівності $|t-s|\leq\delta$ випливає, що $|\varphi(t)-\varphi(s)|<\varepsilon$. Тоді
$$\lambda\big(\{x: |\varphi(g_n(x))-\varphi(g(x))|>\varepsilon\}\big) \leq \lambda\big(\{x: |g_n(x)-g(x)|>\delta\}\big) \to 0, \quad n\to\infty.$$

Тепер аби довести твердження задачі слід покласти
$$g_n(x) = \big(f_n(x)\big)^{2011},\ n\geq 1, \quad g(x) = \big(f(x)\big)^{2011}$$
та зауважити, що функція $\varphi(t) = \sqrt[2011]{t},\ t\in\mathbb{R}$, є рівномірно неперервною на $\mathbb{R}$.

4. Нехай на 2011-елементній множині X задано структуру кільця. Тоді оскільки 2011 — просте число, то адитивна група цього кільця це ціклічна група порядку 2011. Взявши якийсь ненульовий елемент $x\in X$ можемо записати, що $X=\{0,x,2x,\dots,2010x\}$. Розглянемо два випадки:

1) $x^2=0$, тоді для довільних $y,z\in X$ маємо $y=ix, z=jx$, звідки $yz=ijx^2=0$, тобто це кільце з нульовим множенням.

2) $x^2=kx$ для деякого цілого $k\in\{1,\dots,2010\}$. Тоді існує таке $l\in\{1,\dots,2010\}$, що $kl-1$ ділиться на 2011. Розглянемо $a=lx$, тоді $a^2=l^2x^2=l^2kx=lx=a$ та $X=\{0,a,2a,\dots,2010a\}$, а відображення $f: X\ni ia\mapsto i\in\mathbb{Z}_{2011}$ — ізоморфізм.

Відповідь: два — кільце з нульовим множенням та $\mathbb{Z}_{2011}$.

5. Див. розв'язання задачі **8** для 1-2 курсів.

Відповідь: 0.

6. Позначимо B_i матрицю розміру $n\times n$, єдиний ненульовий елемент якої стоїть на перетині i-го рядка та i-го стовпчика і дорівнює 1. Покладемо $\overrightarrow{v_1} = (\sqrt{x_1},\sqrt{x_2},\dots,\sqrt{x_n})$. Тоді $\|\overrightarrow{v_1}\|=1$ та можна доповнити $\overrightarrow{v_1}$ до ортонормованого базису $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\dots,\overrightarrow{v_n}$ простору $\mathbb{R}^n$. Нехай S — матриця, стовпчиками якої є вектори $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\dots,\overrightarrow{v_n}$. Тоді матриці $A_i = S^{\mathrm{T}}B_iS$, $1\leq i\leq n$, є шуканими, бо $A_i^2 = S^{\mathrm{T}}B_iSS^{\mathrm{T}}B_iS = S^{\mathrm{T}}B_i^2S = S^{\mathrm{T}}B_iS = A_i$, $A_iA_j = S^{\mathrm{T}}B_iSS^{\mathrm{T}}B_jS = S^{\mathrm{T}}B_iB_jS = 0$, $i\leq j$ та $(A_i)_{11}=x_i$.

Відповідь: так, існують.

7. Функція $g(t)=t_+$ є опуклою вниз на $\mathbb{R}$, тому за нерівністю Ієнсена
$$\mathsf{M}(\xi_1+\xi_2+\xi_3-K)_+ \geq (\mathsf{M}(\xi_1+\xi_2+\xi_3)-K)_+ = (2-K)_+$$

Рівність досягається зокрема за умови $\xi_1+\xi_2+\xi_3 = 2$ м.н. Залишилось вказати приклад випадкових величин ξ_1, ξ_2, ξ_3, для яких ця умова виконується. Нехай вектор (ξ_1, ξ_2, ξ_3) рівномірно розподілений у трикутнику з вершинами $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$ та $(1, 0, 1)$. Тоді $\xi_1+\xi_2+\xi_3 \equiv 2$ та неважко перевірити, що величини ξ_1, ξ_2, ξ_3 мають потрібну щільність розподілу.

Відповідь: $f(K) = (2 - K)_+, \ K \geq 0.$

8. Функція (Tx, x) досягає найменшого значення на компакті X у деякій точці x_0. Припустимо, що x_0 не є нерухомою точкою. При $x = x_0$, $y = Tx_0$ маємо $\frac{1}{2}d(x_0, Tx_0) < d(x_0, Tx_0)$, а отже $d(T^2x_0, Tx_0) < d(x, Tx_0)$, суперечність. Нехай тепер існують дві різні нерухомі точки: x_0 та y_0. Тоді $0 = \frac{1}{2}d(x_0, Tx_0) < d(x_0, y_0)$, а отже $d(x_0, y_0) < d(x_0, y_0)$, суперечність.