Відкрита студентська олімпіада механіко-математичного факультету

А.В. Бондаренко, В.Б. Брайман, О.Г. Кукуш, Д.Ю. Мітін

Чергове математичне змагання студентів Київського університету було проведено 22 лютого 2010 року. Традиційно до участі запрошувались представники інших вузів. Як завжди, окремо змагалися студенти I–II та III–IV курсів. Далі ми наводимо прізвища переможців, умови та розв'язки запропонованих задач.

Переможці олімпіади серед студентів I–II курсів.

I місце

не присуджувалось

II місце

Шишацький Юрій Олександрович (мех-мат ф-т КНУ, 2 курс)

III місце

Семікіна Юлія Сергіївна (мех-мат ф-т КНУ, 2 курс)
Охонько Дмитро Олександрович (мех-мат ф-т КНУ, 1 курс)
Свідерський Кирило Сергійович (мех-мат ф-т КНУ, 1 курс)
Скочко Володимир Миколайович (мех-мат ф-т КНУ, 2 курс)
Сорока Богдан Віталійович (мех-мат ф-т КНУ, 1 курс)

Переможці олімпіади серед студентів III–IV курсів.

I місце

Радченко Данило Віталійович (мех-мат ф-т КНУ, 3 курс)
Фещенко Іван Сергійович (мех-мат ф-т КНУ, 4 курс)
Шамов Олександр Олександрович (мех-мат ф-т КНУ, 3 курс)
Юрченко Іван Володимирович (мех-мат ф-т КНУ, 4 курс)

II місце

Арман Андрій Романович (мех-мат ф-т КНУ, 3 курс)
Танцюра Максим Вікторович (мех-мат ф-т КНУ, 4 курс)
Македонський Євген Олександрович (мех-мат ф-т КНУ, 3 курс)
Мельникова Катерина Дмитрівна (мех-мат ф-т КНУ, 4 курс)
Цатурян Сергій Рашидович (мех-мат ф-т КНУ, 3 курс)

III місце

Бедзір Олександр Олександрович (ф-т кібернетики КНУ, 3 курс)
Ахтарієв Михайло Маратович (мех-мат ф-т КНУ, 3 курс)

Завдання для 1–2 курсів

1. Чи існує така сукупність функцій $f_\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, що перетин графіків будь-яких двох різних функцій цієї сукупності містить рівно 3 точки, а перетин графіків будь-яких трьох різних функцій — рівно 2 точки? (О.Г. Кукуш)

2. Послідовність $\{a_n,\ n \geq 1\}$ задовольняє умову $[(n+1)a_n] = [na_{n+1}]$, $n \geq 1$ (тут $[x]$ — ціла частина числа x). Довести, що існує таке $c \in \mathbb{R}$, що $|a_n - cn| < 1$ при всіх $n \geq 1$.

(В.Б. Брайман)

3. Нехай функції $f, g \in C([a,b])$ є диференційовними на (a,b) та $g(x) \neq 0$, $x \in [a,b]$. Довести, що існує $x \in (a,b)$ таке, що

$$f'(x)(ag(b) - bg(a)) - g'(x)(af(b) - bf(a)) = \left(\frac{f}{g}\right)'(x)(a-b)g(a)g(b).$$

(Д.Ю. Мітін)

4. Нехай $S = S(A_1, \ldots, A_k)$ — найменша множина дійсних матриць розміру $n \times n$, $n \geq 2$, яка має властивості:

а) $A_1, \ldots, A_k \in S$;

б) якщо $A, B \in S$ та $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то $\alpha A + \beta B \in S$ та $AB \in S$.

При якому найменшому k знайдуться такі матриці $A_1, \ldots, A_k$, що $S(A_1, \ldots, A_k) = M_n(\mathbb{R})$? (М.В. Зельдіч).

5. Послідовність $\{x_n,\ n \geq 1\}$ задано рекурентним співвідношенням $x_{n+1} = x_n + e^{-x_n}$, $n \geq 1$, та початковою умовою $x_1 = 1$. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{\ln n}$. (А.А. Дороговцев)

6. Нехай n — фіксоване натуральне число. Визначити найменше k, при якому для довільних дійсних чисел a_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$, існує такий дійсний многочлен $P(x,y)$ степеня щонайбільше k, що $P(i,j) = a_{ij}$ при всіх $1 \leq i, j \leq n$. (В.Б. Брайман)

7. Нехай A — симетрична вироджена матриця розміру $n \times n$, $n \geq 2$, з цілими коефіцієнтами. Позначимо через A_i матрицю, яка утворюється з A викреслюванням i-го рядка та i-го стовпчика, $1 \leq i \leq n$. Нехай $\det A_1 = 2010$. Довести, що $\det A_i$ ділиться на 2010 при кожному $2 \leq i \leq n$. (Д.В. Радченко)

8. На площині задано точки $P_1, \ldots, P_n$, не всі з яких лежать на одній прямій. Для всіх $1 \leq i, j, k \leq n$, $i \neq j$, покладемо

$$\delta_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{якщо точка } P_k \text{ лежить на прямій } P_iP_j, \\ 0, & \text{якщо точка } P_k \text{ не лежить на прямій } P_iP_j. \end{cases}$$

Довести, що вектори $\overrightarrow{v}_{ij} = (\delta_{ij1}, \delta_{ij2}, \ldots, \delta_{ijn})$, $1 \leq i < j \leq n$, є системою твірних в $\mathbb{R}^n$.

(Т.Д. Тимошкевич)

9. Знайти, при якому найменшому $N \geq 3$ на площині можна розташувати $N+1$ однакових еліпсів $E, E_1, \ldots, E_N$ таким чином, щоб жодні два еліпси не перетинались та при кожному $1 \leq i \leq N$ еліпс E_i дотикався до еліпсів E_{i-1}, E_{i+1} та E (тут $E_0 = E_N$, $E_{N+1} = E_1$).

(С.В. Слободянюк)

Завдання для 3–4 курсів

1. Нехай f — така вимірна за Лебегом функція на $\mathbb{R}$, що $x^3 f(x) \to 1$, $x \to +\infty$. Знайти $\lim\limits_{c\to+\infty} \left(c \cdot \int\limits_c^{+\infty} (x-c) f(x)\, dx \right)$. (О.Г. Кукуш)

2. Нехай функція f є опуклою на $[-1,1]$, $0<\alpha<1$. Довести нерівність

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\alpha \sin x)dx \le \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\sin x)dx.$$

(Д.Ю. Мітін)

3. Нехай випадкові вектори (ξ,η) та $(\xi, f(\xi))$ мають однаковий розподіл, де f — деяка борелева функція на $\mathbb{R}$. Довести, що $\eta = f(\xi)$ м.н. (О.Г. Кукуш)

4. Див. задачу **4** для 1-2 курсів.

5. Див. задачу **6** для 1-2 курсів.

6. Чи можна у лінійному просторі

$$X = \{x = (x_1,\dots,x_n,0,0,\dots) \mid n \ge 1,\ x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}\}$$

ввести таку норму, щоб функція $f(x)=x_1$, $x\in X$, була розривною?

(О.Г. Кукуш, С.В. Шкляр)

7. Див. задачу **8** для 1-2 курсів.

8. Див. задачу **9** для 1-2 курсів.

9. Нехай $\xi_1,\dots,\xi_n$ — незалежні гаусівські випадкові вектори в $\mathbb{R}^n$, які мають нульове середнє та одиничну матрицю коваріацій. Знайти математичне сподівання визначника Грама $\Gamma(\xi_1,\dots,\xi_n) = \det\big((\xi_i,\xi_j)\big)_{i,j=1}^n$. (А.А. Дороговцев)

Розв'язки та вказівки

1–2 курси

1. Розглянемо кусково-лінійні функції $F_\alpha : [0,1]\to\mathbb{R}$, $\alpha\in(0,1)$, задані таким чином:

$$F_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{x}{\alpha}, & 0\le x\le\alpha; \\ \frac{1-x}{1-\alpha}, & \alpha < x \le 1. \end{cases}$$

Графіки усіх функцій F_α проходять через точки $(0,0)$ та $(1,0)$. При $\alpha<\beta$ графіки функцій F_α та F_β крім даних двох точок перетинаються в єдиній точці $\left(\frac{\beta}{1-\alpha+\beta}, \frac{1}{1-\alpha+\beta}\right)$, а тому при довільних $\alpha<\beta<\gamma$ графіки функцій F_α, F_β та F_γ мають рівно дві спільні точки. Залишається покласти $f_\alpha = F_{g(\alpha)}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, де $g:\mathbb{R}\to(0,1)$ — довільна бієкція.

Відповідь: так, існує.

2. *I спосіб.* Розглянемо послідовність $b_n = \frac{a_n}{n}$, $n\ge 1$. За умовою задачі

$$[n(n+1)b_n] = [n(n+1)b_{n+1}],\ n\ge 1,$$

а отже $|n(n+1)b_n - n(n+1)b_{n+1}| < 1$, тобто $|b_n - b_{n+1}| < \frac{1}{n(n+1)}$, $n\ge1$. Звідси при всіх $n,p\ge 1$ дістаємо

$$|b_{n+p}-b_n| \le |b_{n+1}-b_n| + \ldots + |b_{n+p}-b_{n+p-1}| < \\ < \frac{1}{n(n+1)} + \ldots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} \to 0,\ n\to\infty.$$

Таким чином, послідовність $\{b_n\}$ є фундаментальною, а отже збіжною. Покладемо $c = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Тоді при всіх $n \geq 1$ маємо $|b_n - c| = \lim\limits_{p\to\infty} |b_{n+p} - b_n| \leq \frac{1}{n}$. Звідси випливає, що

$$|b_n - c| \leq |b_n - b_{n+1}| + |b_{n+1} - c| < \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n}.$$

Тому $\left|\frac{a_n}{n} - c\right| < \frac{1}{n}$, тобто $|a_n - cn| < 1,\ n \geq 1$.

II спосіб. При кожному $n \geq 1$ нерівність $|a_n - cn| < 1$ рівносильна подвійній нерівності

$$c_n := \frac{a_n - 1}{n} < c < C_n := \frac{a_n + 1}{n}.$$

Доведемо, що всі інтервали $\big(c_n, C_n\big)$, $n \geq 1$, мають спільну точку. З умови задачі випливає, що $|na_{n+1} - (n+1)a_n| < 1$, $n \geq 1$, а отже

$$c_{n+1} - c_n = \frac{a_{n+1} - 1}{n+1} - \frac{a_n - 1}{n} = \frac{na_{n+1} - (n+1)a_n + 1}{n(n+1)} > 0,$$

$$C_{n+1} - C_n = \frac{a_{n+1} + 1}{n+1} - \frac{a_n + 1}{n} = \frac{na_{n+1} - (n+1)a_n - 1}{n(n+1)} < 0.$$

Таким чином, $[c_{n+1}, C_{n+1}] \subset [c_n, C_n]$, $n \geq 1$, причому $C_n - c_n = \frac{2}{n} \to 0$ при $n \to \infty$. Тому за лемою про вкладені відрізки існує єдина точка c, яка належить усім відрізкам $[c_n, C_n]$. Нарешті, оскільки $c \in [c_{n+1}, C_{n+1}] \subset (c_n, C_n)$, то c належить і всім інтервалам (c_n, C_n), $n \geq 1$.

3. Розглянемо функцію

$$h(x) = f(x)(ag(b) - bg(a)) - g(x)(af(b) - bf(a)) - \left(\frac{f}{g}\right)(x)(a-b)g(a)g(b),\ x \in [a,b].$$

Оскільки функція h є неперервною на $[a,b]$ та диференційовною на (a,b), причому $h(a) = h(b) = bf(a)g(b) - af(b)g(a)$, то за теоремою Ролля існує таке $x \in (a,b)$, що

$$h'(x) = f'(x)(ag(b) - bg(a)) - g'(x)(af(b) - bf(a)) - \left(\frac{f}{g}\right)'(x)(a-b)g(a)g(b) = 0.$$

4. При $k = 1$ всі елементи множини $S(A_1)$ є многочленами від A_1, а отже комутують між собою. Тому рівність $S(A_1) = M_n(\mathbb{R})$ не виконується для жодної матриці A_1. Наведемо приклад шуканих матриць для $k = 2$. Позначимо E_{ij} матрицю розміру $n \times n$, єдиний ненульовий елемент якої стоїть на перетині i-го рядка та j-го стовпчика і дорівнює 1. Покладемо

$$A_1 = E_{11}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

(тут A_2 — матриця-перестановка). Легко перевірити, що $A_2^{n-i+1} A_1 A_2^{n-j+1} = E_{ij}$. Таким чином, множина $S(A_1, A_2)$ містить усі матриці E_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$, які утворюють базис у $M_n(\mathbb{R})$, а тому $S(A_1, A_2) = M_n(\mathbb{R})$.

Відповідь: $k = 2$.

5. Послідовність $\{x_n\}$ зростає, а отже має скінченну або нескінченну границю. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x < +\infty$, то $x = x + e^{-x}$, суперечність. Таким чином, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Двічі застосовуючи теорему Штольця, отримуємо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{\ln(n+1) - \ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-x_n}}{\ln(1 + \frac{1}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^{x_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{x_{n+1}} - e^{x_n}}.$$

Залишилось зауважити, що

$$\lim_{n\to\infty} (e^{x_{n+1}} - e^{x_n}) = \lim_{n\to\infty} (e^{x_n + e^{-x_n}} - e^{x_n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{e^{-x_n}} - 1}{e^{-x_n}} = \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1.$$

Відповідь: 1.

6. Перевіримо, що для кожного многочлена $P(x,y)$ існує многочлен $Q(x,y)$ вигляду

$$\sum_{i,j=0}^{n-1} c_{ij} x^i y^j \tag{$*$}$$

такий, що $\deg Q \le \deg P$ та $Q(i,j) = P(i,j)$ при всіх $1 \le i,j \le n$. Справді, можна записати $P(x,y)$ як $\sum\limits_{l\ge 0} P_l(x) y^l$ та замінити кожен многочлен $P_l(x)$ його залишком від ділення на $\prod\limits_{i=1}^{n}(x-i)$, а потім переписати результат як $\sum\limits_{l=0}^{n-1} x^l \widetilde{P}_l(y)$ та замінити кожен многочлен $\widetilde{P}_l(y)$ його залишком від ділення на $\prod\limits_{j=1}^{n}(y-j)$. Отже, достатньо розглядати лише многочлени $P(x,y)$ вигляду $(*)$.

Зауважимо, що для довільних чисел a_{ij} існує інтерполяційний многочлен вигляду $(*)$, а саме

$$P(x,y) = \sum_{i_0,j_0=1}^{n} a_{i_0 j_0} \cdot \prod_{\substack{i=0\\ i\ne i_0}}^{n} \frac{x-i}{i_0-i} \cdot \prod_{\substack{j=0\\ j\ne j_0}}^{n} \frac{y-j}{j_0-j}. \tag{$**$}$$

Таким чином, $k \le 2n-2$. З іншого боку, множина многочленів вигляду $(*)$ та множина наборів дійсних чисел $\{a_{ij},\ 1 \le i,j \le n\}$ — лінійні простори однакової розмірності n^2 над $\mathbb{R}$. Отже, співвідношення $(**)$ визначає взаємно-однозначну відповідність між наборами чисел $\{a_{ij}\}$ та многочленами вигляду $(*)$. Наприклад, єдиний многочлен вигляду $(*)$, який відповідає числам $a_{ij} \equiv i^{n-1} j^{n-1}$, дорівнює $x^{n-1}y^{n-1}$ та має степінь $2n-2$. Тому $k = 2n-2$.

Відповідь: $k = 2n-2$.

7. *I спосіб.* Нехай A_{ij} — матриця, утворена з A викреслюванням i-го рядка та j-го стовпчика, $1 \le i,j \le n$. Зокрема, $A_{ii} = A_i$. Оскільки $\det A = 0$ та $\det A_1 = 2010 \ne 0$, то останні $n-1$ стовпчиків матриці A лінійно незалежні, а перший стовпчик — їх лінійна комбінація з коефіцієнтами $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Оскільки матриця A симетрична, то перший рядок є лінійною комбінацією останніх $n-1$ рядків з тими ж коефіцієнтами $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$, а оскільки матриця A має цілі коефіцієнти, то $\lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{Q}$. Зафіксуємо $i > 1$ та розглянемо матрицю A_{i1}. Її перший рядок є лінійною комбінацією інших рядків матриці A_{i1} та i-го рядка матриці A з викресленим першим елементом. Тому легко перевірити, що $\det A_{i1} = (-1)^{i-1}\lambda_i \det A_{11}$. Аналогічно отримуємо

$$\det A_i = \det A_{ii} = (-1)^{i-1}\lambda_i \det A_{i1} = \lambda_i^2 \det A_{11} = 2010\lambda_i^2.$$

Зауважимо, що $\det A_i = 2010\lambda_i^2$ є цілим як визначник матриці з цілими коефіцієнтами. Якщо λ_i не є цілим числом, то $\lambda_i = \frac{s}{t}$ — нескоротний дріб, де $s \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{N}$, $t > 1$. Тоді $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$ не ділиться на t^2, а отже $2010\lambda_i^2 = \frac{2010s^2}{t^2}$ не є цілим, суперечність. Тому λ_i ціле та $\det A_i = 2010\lambda_i^2$ ділиться на 2010.

II спосіб. З умови випливає, що $\operatorname{rk} A = n-1$. Нехай $\widetilde{A} = (\widetilde{a}_{ij})_{i,j=1}^n$ — приєднана матриця, тобто $\widetilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j}\det A_{ji}$, де A_{ij} — матриця, утворена з A викреслюванням i-го рядка та j-го стовпчика, $1 \le i, j \le n$. Тоді $A\widetilde{A} = \det A \cdot E = 0$, де E — одинична матриця розміру $n \times n$. З відомої нерівності $\operatorname{rk} AB \ge \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B - n$ випливає, що

$$0 = \operatorname{rk} A\widetilde{A} \ge \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} \widetilde{A} - n = \operatorname{rk} \widetilde{A} - 1.$$

Отже, $\operatorname{rk} \widetilde{A} \le 1$, тобто усі рядки матриці $\widetilde{A}$ пропорційні. Звідси якщо $\widetilde{a}_{i1} = \mu_i \widetilde{a}_{11}$, то $\widetilde{a}_{ii} = \mu_i \widetilde{a}_{i1} = \mu_i^2 \widetilde{a}_{11}$. Але усі $\widetilde{a}_{ij}$ є цілими, отже $\mu_i \in \mathbb{Q}$. Тепер

$$\det A_i = \widetilde{a}_{ii} = \mu_i^2 \widetilde{a}_{11} = 2010\mu_i^2$$

і розв'язання можна завершити так само, як у I способі.

8. *I спосіб.* Припустимо, що вектори $\overrightarrow{v}_{ij}$, $1 \le i < j \le n$, не є системою твірних в $\mathbb{R}^n$. Тоді існує вектор $\overrightarrow{x} = (x_1, \ldots, x_n) \ne \overrightarrow{0}$, який є ортогональним до усіх векторів $\overrightarrow{v}_{ij}$, тобто

$$\forall\ 1 \le i < j \le n \qquad \left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{v}_{ij}\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k \delta_{ijk} = 0.$$

Це означає, що в точках $P_1, \ldots, P_n$ можна розташувати числа $x_1, \ldots, x_n$ так, щоб сума чисел на кожній прямій P_iP_j дорівнювала нулю. Нехай $S = x_1 + \ldots + x_n$. Зафіксуємо довільну точку P_i, $1 \le i \le n$, і розглянемо усі прямі P_iP_j, $j \ne i$. Нехай серед цих прямих є k_i різних, причому $k_i > 1$ за умовою задачі. Тоді сума сум чисел на усіх прямих P_iP_j дорівнює $S + (k_i - 1)x_i = 0$, бо сума чисел на кожній прямій дорівнює нулю, доданок x_i було враховано k_i разів, а усі доданки x_j, $j \ne i$ враховано по одному разу. Отже, $x_i = -\frac{S}{k_i - 1}$, $1 \le i \le n$, тобто координати ненульового вектора $\overrightarrow{x}$ або усі додатні, або усі від'ємні. Але тоді сума чисел на жодній прямій P_iP_j не є нульовою, суперечність.

II спосіб. Нехай серед прямих P_iP_j є m різних. Розглянемо матрицю A розміру $n \times m$, стовпчиками якої є вектори $\overrightarrow{v}_{ij}$, що відповідають попарно різним прямим. Для матриці $B = AA^{\mathrm{T}} = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ неважко перевірити, що b_{ij} — кількість прямих, які проходять через точки P_i та P_j одночасно. Таким чином, $b_{ij} = 1$ при $i \ne j$ та $b_{ii} = k_i$, де $k_i > 1$ — кількість прямих, які проходять через точку P_i, $1 \le i \le n$. Якщо показати, що визначник матриці B ненульовий, то звідси випливатиме, що $\mathrm{rk}A \ge \mathrm{rk}B = n$, а отже стовпчики матриці A є системою твірних в $\mathbb{R}^n$. Залишилось обчислити $\det B$. Віднімемо перший рядок від усіх інших, а потім віднімемо від першого рядка інші рядки, помножені на $\frac{1}{k_2-1}, \dots, \frac{1}{k_n-1}$ відповідно. Отримаємо

$$\det B = \begin{vmatrix} k_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & k_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & k_3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & k_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1-k_1 & k_2-1 & 0 & \dots & 0 \\ 1-k_1 & 0 & k_3-1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1-k_1 & 0 & 0 & \dots & k_n-1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} k_1 + (k_1-1)\left(\frac{1}{k_2-1} + \dots + \frac{1}{k_n-1}\right) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1-k_1 & k_2-1 & 0 & \dots & 0 \\ 1-k_1 & 0 & k_3-1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1-k_1 & 0 & 0 & \dots & k_n-1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(k_1 + (k_1-1)\left(\frac{1}{k_2-1} + \dots + \frac{1}{k_n-1}\right)\right)(k_2-1)\cdot \ldots \cdot (k_n-1) =$$

$$= (k_1-1)(k_2-1)\cdot \ldots \cdot (k_n-1)\left(1 + \frac{1}{k_1-1} + \frac{1}{k_2-1} + \dots + \frac{1}{k_n-1}\right) > 0,$$

що і завершує доведення.

9. Розглянемо еліпс E_1 з фокусами $(x, 2-x)$ та $(2-x, x)$, $0 < x < 1$, який дотикається до координатних осей у точках $(x^2-2x+2, 0)$ та $(0, x^2-2x+2)$, і рівний йому еліпс E з фокусами $(\pm\sqrt{2}(1-x), 0)$. При $x = 0$ еліпси перетворюються на два відрізка, які не перетинаються, а при $x = 1$ — на два кола, які перетинаються. Неважко перевірити, що найменша відстань між еліпсами E_1 та E є неперервною функцією від x. Розглянемо x_* — точну нижню межу тих $0 < x < 1$, при яких еліпси мають спільні точки. Тоді з міркувань неперервності отримуємо, що при $x = x_*$ еліпси E_1 та E будуть дотикатися. Симетрично відображаючи еліпс E_1 відносно осей та початку координат, отримуємо ще три шукані еліпси E_2, E_3 та E_4.

Припустимо, що існують еліпси E, E_1, E_2, E_3, які попарно дотикаються. Легко перевірити, що тоді один з еліпсів лежить всередині трикутника, вершинами якого є точки дотику трьох інших еліпсів. Але тоді велика вісь цього еліпса менша за найбільшу сторону трикутника, яка є хордою іншого еліпса, а тому не більша за його велику вісь. Таким чином, отримали суперечність з тим, що еліпси однакові.

Відповідь: $N = 4$.

3–4 курси

1. Для довільного $0 < \varepsilon < 1$ існує $C = C(\varepsilon)$ таке, що при всіх $x \ge C$ маємо

$$\frac{1-\varepsilon}{x^3} < f(x) < \frac{1+\varepsilon}{x^3}.$$

Тому при всіх $c \geq C$ визначено інтеграл $\int\limits_c^{+\infty} (x-c)f(x)\,dx$, причому

$$\frac{1-\varepsilon}{2} = (1-\varepsilon)c\int\limits_c^{+\infty} \frac{x-c}{x^3}\,dx \leq c \cdot \int\limits_c^{+\infty} (x-c)f(x)\,dx \leq (1+\varepsilon)c\int\limits_c^{+\infty} \frac{x-c}{x^3}\,dx = \frac{1+\varepsilon}{2}.$$

Оскільки $0 < \varepsilon < 1$ довільне, то шукана границя дорівнює $\frac{1}{2}$.

Відповідь: $\frac{1}{2}$.

2. За нерівністю Ієнсена $f(\alpha \sin x) \leq \frac{1+\alpha}{2} f(\sin x) + \frac{1-\alpha}{2} f(-\sin x)$. Тому

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\alpha \sin x)dx \leq \tfrac{1+\alpha}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\sin x)dx + \tfrac{1-\alpha}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(-\sin x)dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\sin x)dx.$$

3. Розглянемо множину $A = \big\{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\big\} \subset \mathbb{R}^2$. Ця множина є борелевою, бо $A = \big\{(x,y) : y - f(x) \in \{0\}\big\} = \varphi^{-1}(\{0\})$, де функція $\varphi(x,y) = y - f(x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ є борелевою як різниця неперервної функції $\pi_2(x,y) = y$ та функції $f(\pi_1(x,y)) = f(x)$, яка є композицією неперервної функції $\pi_1(x,y) = x$ та борелевої функції f, а множина $\{0\}$ є замкненою. Тому $P\big(\{(\xi,\eta) \in A\}\big) = P\big(\{(\xi, f(\xi)) \in A\}\big) = 1$, тобто $(\xi,\eta) \in A$ м.н. Таким чином, $\eta = f(\xi)$ м.н.

4. Див. задачу **4** для 1-2 курсів.

5. Див. задачу **6** для 1-2 курсів.

6. Покладемо

$$\|x\| = \sqrt{\left(x_1 - \sum_{k=2}^{\infty} k x_k\right) + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_k^2 + \ldots}, \; x \in X.$$

Неважко перевірити, що це справді норма на X. Розглянемо

$$x(n) = \Big(n, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-2}, \frac{1}{n}, 0, \ldots\Big), n \geq 2.$$

Тоді $\|x(n)\| = \frac{1}{n} \to 0$, $n \to \infty$, але $f\big(x(n)\big) = n \to \infty$ при $n \to \infty$. Отже, f розривна.

Відповідь: так, можна.

Зауваження. Іншими прикладами шуканої норми є

$$\|x\| = \sqrt{\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k t^{k-1}\right)^2 dt}, \; x \in X, \text{ або } \|x\| = \int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k t^{k-1}\right| dt, \; x \in X.$$

7. Див. задачу **8** для 1-2 курсів.

8. Див. задачу **9** для 1-2 курсів.

9. *I спосіб.* Визначник Грама $\Gamma(\xi_1, \dots, \xi_n)$ дорівнює квадрату об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\xi_1, \dots, \xi_n$. Тому

$$\Gamma(\xi_1, \dots, \xi_n) = \|\xi_1\|^2 \cdot d_2^2 \cdot \ldots \cdot d_n^2,$$

де d_k — довжина ортогональної складової ξ_k відносно підпростору, породженого векторами $\xi_1, \dots, \xi_{k-1}$.

Доведемо, що для кожного $1 \le k \le n$

$$P\left\{\Gamma(\xi_1, \dots, \xi_k) \ne 0\right\} = 1 \quad \text{та} \quad \mathsf{M}\Gamma(\xi_1, \dots, \xi_k) = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

Для $k = 1$ ці твердження очевидні. Нехай вони справджується при деякому k, $1 \le k \le n-1$. Розглянемо $\Gamma(\xi_1, \dots, \xi_{k+1}) = \Gamma(\xi_1, \dots, \xi_k) \cdot d_{k+1}^2$. За припущенням індукції $\xi_1, \dots, \xi_k$ є лінійно незалежними з імовірністю 1. Тому при фіксованих $\xi_1, \dots, \xi_k$ величина d_{k+1}^2 має розподіл χ_{n-k}^2, тобто такий само розподіл, як квадрат норми центрованого гаусівського вектора розмірності $n-k$ з нульовим середнім та одиничною коваріаційною матрицею. Таким чином, $d_{k+1}^2 \ne 0$ м.н. і

$$P\left\{\Gamma(\xi_1, \dots, \xi_{k+1}) \ne 0\right\} = 1.$$

Далі, $\mathsf{M}\Gamma(\xi_1, \dots, \xi_{k+1}) = \mathsf{M}(\mathsf{M}\Gamma(\xi_1, \dots, \xi_{k+1})/\xi_1, \dots, \xi_k) =$

$$= \mathsf{M}\Gamma(\xi_1, \dots, \xi_k)\mathsf{M}(d_{k+1}^2/\xi_1, \dots, \xi_k) = \mathsf{M}\Gamma(\xi_1, \dots, \xi_k)(n-k) = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k).$$

При $k = n$ звідси отримуємо $\mathsf{M}\Gamma(\xi_1, \dots, \xi_n) = n!$

II спосіб. Нехай $\xi_i = (\xi_{i1}, \xi_{i2}, \dots, \xi_{in})$, $1 \le i \le n$. Покладемо $A = (\xi_{ij})_{i,j=1}^n$. Тоді $AA^{\mathrm{T}} = \big((\xi_i, \xi_j)\big)_{i,j=1}^n$, а отже $\Gamma(\xi_1, \dots, \xi_n) = \det(AA^{\mathrm{T}}) = (\det A)^2$. Звідси

$$\mathsf{M}\Gamma(\xi_1, \dots, \xi_n) = \mathsf{M}(\det A)^2 = \mathsf{M}\left(\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)} \xi_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot \xi_{n\sigma(n)}\right)^2 =$$
$$= \sum_{\sigma, \tau \in S_n} (-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma) + \mathrm{sgn}(\tau)} \mathsf{M}\big(\xi_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot \xi_{n\sigma(n)} \xi_{1\tau(1)} \cdot \ldots \cdot \xi_{n\tau(n)}\big).$$

Залишилось зауважити, що оскільки вектори $\xi_1, \dots, \xi_n$ стохастично незалежні, мають нульове середнє та одиничну матрицю коваріацій, то

$$\mathsf{M}\big(\xi_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot \xi_{n\sigma(n)} \xi_{1\tau(1)} \cdot \ldots \cdot \xi_{n\tau(n)}\big) = \mathsf{M}\big(\xi_{1\sigma(1)} \xi_{1\tau(1)}\big) \cdot \ldots \cdot \mathsf{M}\big(\xi_{n\sigma(n)} \xi_{n\tau(n)}\big) = \begin{cases} 1, & \sigma = \tau, \\ 0, & \sigma \ne \tau, \end{cases}$$

а отже $\mathsf{M}\Gamma(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum\limits_{\sigma = \tau \in S_n} 1 = n!$

Відповідь: $n!$