Відкрита студентська олімпіада механіко-математичного факультету

В. Б. Брайман, О. Г. Кукуш, Д. Ю. Мітін

Чергове математичне змагання студентів Київського університету було проведено 23 лютого 2009 року. Традиційно до участі були запрошені представники інших вузів. Як завжди, окремо змагалися студенти I–II та III–IV курсів. У олімпіаді взяли участь понад 60 студентів. Далі ми наводимо прізвища переможців, умови та розв'язки запропонованих задач.

Переможці олімпіади серед студентів I–II курсів.

I місце

Радченко Данило Віталійович (мех-мат ф-т КНУ, 2 курс)

II місце

Шамов Олександр Олександрович (мех-мат ф-т КНУ, 2 курс)
Шишацький Юрій Олександрович (мех-мат ф-т КНУ, 1 курс)

III місце

Арман Андрій Романович (мех-мат ф-т КНУ, 2 курс)
Бедзір Олександр Олександрович (ф-т кібернетики КНУ, 2 курс)
Білокопитов Євген Олександрович (мех-мат ф-т КНУ, 2 курс)
Семікіна Юлія Сергіївна (мех-мат ф-т КНУ, 1 курс)
Македонський Євген Олександрович (мех-мат ф-т КНУ, 2 курс)
Трофимович Сергій Валерійович (НТУУ "КПІ", 2 курс)
Хачатуров Віталій Анатолійович (мех-мат ф-т КНУ, 1 курс)

Переможці олімпіади серед студентів III–IV курсів.

I місце

Фещенко Іван Сергійович (мех-мат ф-т КНУ, 3 курс)
Кравець Олександр Геннадійович (мех-мат ф-т КНУ, 4 курс)

II місце

Слободянюк Сергій Валерійович (мех-мат ф-т КНУ, 4 курс)
Зубач Федір Іванович (НТУУ "КПІ", 4 курс)
Тимошкевич Лариса Миколаївна (мех-мат ф-т КНУ, 4 курс)

III місце

Безбородов Віктор Костянтинович (НПУ ім. М.П. Драгоманова, 4 курс)
Танцюра Максим Вікторович (мех-мат ф-т КНУ, 3 курс)
Юрченко Іван Володимирович (мех-мат ф-т КНУ, 3 курс)

Завдання для 1–2 курсів

1. У коло вписано трикутник ABC. Чи завжди на колі знайдеться така точка D, що у чотирикутник $ABCD$ можна вписати коло? (О. Г. Кукуш)

2. Нехай $F_0 = 0, F_1 = 1, F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$, $k \geq 2$ — числа Фібоначчі. Знайти усі такі натуральні n, що многочлен $F_n x^{n+1} + F_{n+1} x^n - 1$ є незвідним у кільці многочленів з раціональними коефіцієнтами $\mathbb{Q}[x]$. (Р.П. Ушаков)

3. Нехай A, B, C — кути гострокутного трикутника. Довести нерівності:

$$\text{а)} \quad \frac{\cos A}{\sin B \sin C} + \frac{\cos B}{\sin C \sin A} + \frac{\cos C}{\sin A \sin B} \geq 2;$$

$$\text{б)} \quad \frac{\cos A}{\sqrt{\sin B \sin C}} + \frac{\cos B}{\sqrt{\sin C \sin A}} + \frac{\cos C}{\sqrt{\sin A \sin B}} \leq \sqrt{3}.$$

(О. Г. Кукуш, М.М. Рожкова)

4. При яких натуральних n існують такі матриці $A, B, C \in M_n(\mathbb{Z})$, що

$$ABC + BCA + CAB = E?$$

Тут E — одинична матриця. (В. Б. Брайман)

5. Нехай $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — такі функції, що $\big(x(t) - x(s)\big)\big(y(t) - y(s)\big) \geq 0$ при всіх $t, s \in \mathbb{R}$. Довести що існують дві неспадні функції $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ та функція $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такі, що $x(t) = f(z(t))$ та $y(t) = g(z(t))$ при всіх $t \in \mathbb{R}$. (Ж. Дене (Бельгія), В. Б. Брайман)

6. Про послідовність $\{x_n,\, n \geq 1\}$ дійсних чисел відомо, що існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$. Довести, що при довільному $p > 1$ існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} \sum\limits_{k=1}^{n} k^{p-1} x_k$.

(Д. Ю. Мітін)

7. Нехай $K(x) = xe^{-x}, x \in \mathbb{R}$. При кожному $n \geq 3$ знайти

$$\sup_{x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}} \min_{1 \leq i < j \leq n} K(|x_i - x_j|).$$

(А. В. Бондаренко, Е. Сафф (США))

8. Чи існує функція $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ така, що при довільних $x, y \in \mathbb{Q}$, $x \neq y$, має місце нерівність $f(x)f(y) \leq |x-y|$ та для кожного $x \in \mathbb{Q}$ множина $\big\{y \in \mathbb{Q} \,|\, f(x)f(y) = |x-y|\big\}$ є нескінченною? (В. Б. Брайман)

9. При яких $n \geq 2$ можна занумерувати всі перестановки множини $\{1, \ldots, n\}$ числами від 1 до $n!$ таким чином, щоб для будь-якої пари перестановок σ, τ з сусідніми номерами, а також для пари перестановок з номерами 1 та $n!$, співвідношення $\sigma(k) \neq \tau(k)$ виконувалось при всіх $1 \leq k \leq n$? (О. В. Руденко)

Завдання для 3–4 курсів

1. Див. задачу **4** для 1-2 курсів.
2. Див. задачу **6** для 1-2 курсів.
3. Див. задачу **5** для 1-2 курсів.
4. Див. задачу **7** для 1-2 курсів.
5. Див. задачу **8** для 1-2 курсів.

6. Нехай μ — така міра на борелевій $\sigma-$алгебрі в $\mathbb{R}$, що $\int_{\mathbb{R}} e^{ax} d\mu(x) < \infty$ при всіх $a \in \mathbb{R}$, причому $\mu\big((-\infty, 0)\big) > 0$, $\mu\big((0, +\infty)\big) > 0$. Довести, що існує єдине дійсне a таке, що $\int_{\mathbb{R}} x e^{ax} d\mu(x) = 0$. (О. Г. Кукуш)

7. Нехай $\{\xi_n,\, n \geq 0\}$ та $\{\nu_n,\, n \geq 1\}$ — незалежні одна від одної послідовності незалежних однаково розподілених (у кожній послідовності) випадкових величин. Відомо, що $\mathsf{M}\xi_0 = 0$ та $P\{\nu_1 = 1\} = p$, $P\{\nu_1 = 0\} = 1 - p$, $p \in (0, 1)$. Покладемо $x_0 = 0$ та $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \nu_k, n \geq 1$. Довести, що з імовірністю одиниця $\dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n} \xi_{x_k} \to 0$, $n \to \infty$.

(А.А. Дороговцев)

8. Нехай $X_1, \ldots, X_{2n}$ — незалежні однаково розподілені випадкові величини, причому $X_1 \neq 0$ м.н. Покладемо

$$Y_k = \frac{\left|\sum_{i=1}^k X_i\right|}{\sqrt{\sum_{i=1}^k X_i^2}}, \ 1 \leq k \leq 2n.$$

Довести нерівність $\mathsf{M}(Y_{2n}^2) \leq 1 + 4(\mathsf{M}Y_n)^2$. (С. Новак, Великобританія)

9. Див. задачу **9** для 1-2 курсів.

Розв'язки та вказівки

1–2 курси

1. *I спосіб.* У чотирикутник $ABCD$ можна вписати коло тоді і тільки тоді, коли $AD + BC = AB + CD$. Нехай R — радіус кола, описаного навколо чотирикутника $ABCD$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ABD = \varphi \leq \beta$. Тоді $\angle DBC = \beta - \varphi$ та за теоремою синусів $AD + BC - AB - CD = BC - AB + 2R(\sin\varphi - \sin(\beta - \varphi)) =: f(\varphi)$. Функція f є неперервною на $[0, \beta]$ та за нерівністю трикутника $f(0) = BC - AB - AC < 0$, $f(\beta) = BC - AB + AC > 0$. За теоремою Коші про проміжне значення існує $0 < \varphi_0 < \beta$, при якому $f(\varphi_0) = 0$, тобто чотирикутник $ABCD$ шуканий.

II спосіб. При $AB \neq BC$ розглянемо гілку гіперболи з фокусами A та C, яка проходить через точку B. Ця гілка гіперболи вдруге перетинає описане коло трикутника ABC у такій точці D, що $AD - CD = AB - BC$, тобто $AD + BC = AB + CD$ і чотирикутник $ABCD$ шуканий. При $AB = BC$ аналогічно шукана точка D — точка перетину серединного перпендикуляру до AC з описаним колом трикутника ABC.

2. При $n = 1$ многочлен $x^2 + x - 1$ має ірраціональні корені $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ і є незвідним у $\mathbb{Q}[x]$. При $n \geq 2$ маємо

$$F_n x^{n+1} + F_{n+1} x^n - 1 = (x^2 + x - 1)\left(F_n x^{n-1} + F_{n-1} x^{n-2} + \ldots + F_2 x + F_1\right),$$

тобто многочлен не є незвідним.

Відповідь: $n = 1$.

3. а) Маємо

$$\frac{\cos A}{\sin B\sin C}+\frac{\cos B}{\sin A\sin C}+\frac{\cos C}{\sin A\sin B}=$$
$$=\frac{\cos A\sin A+\cos B\sin B+\cos C\sin C}{\sin A\sin B\sin C}=\frac{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}{2\sin A\sin B\sin C}=$$
$$=\frac{2\sin(A+B)\cos(A-B)-2\sin(A+B)\cos(A+B)}{2\sin A\sin B\sin(A+B)}=\frac{2\sin A\sin B}{\sin A\sin B}=2,$$

тобто нерівність перетворюється на тотожність.

б) За нерівністю Коші-Буняковського

$$\left(\frac{\cos A}{\sqrt{\sin B\sin C}}+\frac{\cos B}{\sqrt{\sin A\sin C}}+\frac{\cos C}{\sqrt{\sin A\sin C}}\right)^2\le$$
$$\le\left(\frac{\cos A}{\sin B\sin C}+\frac{\cos B}{\sin A\sin C}+\frac{\cos C}{\sin A\sin C}\right)(\cos A+\cos B+\cos C)=$$
$$=2\left(\cos A+\cos B+\cos C\right)\le\sqrt{3},$$

бо функція $\cos t$, $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$, є опуклою вгору і за нерівністю Ієнсена маємо $\cos A+\cos B+\cos C\le 3\cos\frac{A+B+C}{3}=3\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. Слід добутку двох матриць не залежить від порядку множників, тому

$$\operatorname{tr}ABC=\operatorname{tr}(AB)C=\operatorname{tr}C(AB)=\operatorname{tr}CAB=\operatorname{tr}(CA)B=\operatorname{tr}B(CA)=\operatorname{tr}BCA$$

та

$$n=\operatorname{tr}E=\operatorname{tr}(ABC+BCA+CAB)=3\operatorname{tr}ABC$$

і n має ділитися на 3. При $n=3$ можна взяти

$$A_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad B_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\quad C_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

При $n=3k$, $k>1$, можна побудувати A, B, C як блочні матриці: $A_k=\operatorname{diag}(A_1,\dots,A_1)$, $B_k=\operatorname{diag}(B_1,\dots,B_1)$, $C_k=\operatorname{diag}(C_1,\dots,C_1)$.
Відповідь: $n=3k$, $k\in\mathbb{N}$.

5. Нехай $K=\{(x(t),y(t))|t\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{R}^2$. Якщо $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in K$ і $x_1+y_1\le x_2+y_2$, то $x_1\le x_2$ та $y_1\le y_2$, причому з $x_1+y_1=x_2+y_2$ випливає, що $x_1=x_2$, $y_1=y_2$. Тому на множині $L=\{x+y|(x,y)\in K\}\subset\mathbb{R}$ коректно визначені неспадні функції $f:x+y\mapsto x$, $g:x+y\mapsto y$, де $(x,y)\in K$. Покладемо $z(t)=x(t)+y(t)$, $t\in\mathbb{R}$. Тоді $x(t)=f(z(t))$, $y(t)=g(z(t))$, $t\in\mathbb{R}$.

Залишається продовжити f та g з L на $\mathbb{R}$ таким чином, щоб продовження залишились неспадними функціями. Покажемо, що $f,g:L\to\mathbb{R}$ є ліпшицевими зі сталою Ліпшиця 1. Справді, при $z_1=x_1+y_1<z_2=x_2+y_2$ маємо

$$|z_2-z_1|=x_2+y_2-x_1-y_1=|x_2-x_1|+|y_2-y_1|=|f(z_2)-f(z_1)|+|g(z_2)-g(z_1)|.$$

Тому f, g можна продовжити спочатку на замикання $\overline{L}$ за неперервністю, а потім лінійним чином на кожен з інтервалів, з яких складається $\mathbb{R}\backslash\overline{L}$, зі збереженням монотонності f, g.

6. Функція $K(t) = te^{-t}$, $t \geq 0$, зростає на $[0;1]$ та спадає на $[1;+\infty)$. Визначимо $a = a(n)$ з умови $K(a) = K\big((n-1)a\big)$, тобто $ae^{-a} = (n-1)e^{-(n-1)a}$, $a = \frac{1}{n-2}\ln(n-1)$. Покажемо, що шуканий супремум дорівнює $K(a) = \frac{\ln(n-1)}{(n-2)(n-1)^{\frac{1}{n-2}}}$ і досягається для точок $x_1^* < x_2^* < \ldots < x_n^*$ за умови, що $x_2^* - x_1^* = x_3^* - x_2^* = \ldots = x_n^* - x_{n-1}^* = a$. Справді, при всіх $i \neq j$ маємо $|x_i^* - x_j^*| = |i-j|a \in [a;(n-1)a]$ та $K(|x_i^* - x_j^*|) \geq K(a)$, звідки

$$\inf_{i\neq j} K(|x_i^* - x_j^*|) = K(a).$$

Припустимо, що для деяких точок $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ маємо

$$\inf_{i\neq j} K(|x_i - x_j|) > K(a).$$

Тоді мають одночасно виконуватись нерівності

$$x_2 - x_1 > a,\ x_3 - x_2 > a,\ \ldots,\ x_n - x_{n-1} > a,$$

звідки $x_n - x_1 > (n-1)a$ та $K(|x_n - x_1|) > K\big((n-1)a\big) = K(a)$, суперечність.

Відповідь: $\frac{\ln(n-1)}{(n-2)(n-1)^{\frac{1}{n-2}}}$.

7. Нехай $y_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k,\ n \geq 1$. Тоді $x_k = ky_k - (k-1)y_{k-1}$, $k \geq 1$, де $y_0 = 0$, та

$$\frac{1}{n^p}\sum_{k=1}^{n} k^{p-1}x_k = -\frac{1}{n^p}\sum_{k=1}^{n-1}\big((k+1)^{p-1} - k^{p-1}\big)ky_k + y_n.$$

Покладемо $c_{nk} = \frac{p}{(p-1)n^p}\big((k+1)^{p-1} - k^{p-1}\big)k$, $1 \leq k \leq n-1$, $n \geq 1$. Тоді $c_{nk} \geq 0$, при кожному k маємо $c_{nk} \to 0$, $n \to \infty$, та за теоремою Штольца

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1} c_{nk} = \lim_{n\to\infty}\frac{p}{(p-1)n^p}\sum_{k=1}^{n-1}\big((k+1)^{p-1} - k^{p-1}\big)k =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{p}{p-1}\cdot\frac{\big((n+1)^{p-1} - n^{p-1}\big)n}{(n+1)^p - n^p} = 1.$$

Звідси за теоремою Тьопліца $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1} c_{nk}y_k = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, а отже

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}\sum_{k=1}^{n} k^{p-1}x_k = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{p-1}{p}\sum_{k=1}^{n} c_{nk}y_k + y_n\right) = \frac{1}{p}\lim_{n\to\infty} y_n.$$

8. Покладемо $f(\frac{p}{q}) = \frac{1}{q}$, де $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ та $\frac{p}{q}$ — нескоротний дріб. Покажемо, що функція f шукана. Справді, при $x = \frac{p}{q}$, $y = \frac{r}{s}$, $x \neq y$, маємо

$$|x - y| = \frac{|ps - qr|}{qs} \geq \frac{1}{qs} = f(x)f(y).$$

Нехай тепер $x = \frac{p}{q}$ — нескоротний дріб. З алгоритму Евкліда випливає, що $|ps - qr| = 1$ для деяких $r \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{N}$. Тоді $|p(s + nq) - q(r + np)| = 1$ і для усіх $y_n = \frac{r+np}{s+nq}$, $n \geq 1$, маємо $f(x)f(y_n) = |x - y_n|$.

9. При $n = 2$ нумерація очевидно існує. При $n = 3$ сусідні номери можуть мати лише перестановки, які отримуються одна з однієї циклічним зсувом, а тому легко перевірити, що шуканої нумерації не існує. Побудуємо приклад для $n \geq 4$. Будемо казати, що нумерація $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n!}$ перестановок множини $\{1, \ldots, n\}$ є

(A)-нумерацією, якщо при всіх $1 \leq k \leq n$ маємо $\sigma_{l+1}(k) \neq \sigma_l(k)$, $1 \leq l \leq n! - 1$ та $\sigma_1(k) \neq \sigma_{n!}(k)$;

(B)-нумерацією, якщо при всіх $1 \leq k \leq n-1$ маємо $\sigma_{l+1}(k+1) \neq \sigma_l(k)$, $1 \leq l \leq n!-1$ та $\sigma_1(k + 1) \neq \sigma_{n!}(k)$.

Шуканий приклад буде побудовано, якщо показати, що (A)-нумерація перестановок множини $\{1, \ldots, n\}$ існує при всіх $n \geq 4$. Одночасно ми покажемо, що (B)-нумерація перестановок множини $\{1, \ldots, n\}$ існує при всіх $n \geq 3$.

Лема 1. Нехай існує (B)-нумерація $\sigma_1, \ldots, \sigma_{(n-1)!}$ перестановок множини $\{1, \ldots, n-1\}$. Тоді існує (A)-нумерація $\tau_1, \ldots, \tau_{n!}$ перестановок множини $\{1, \ldots, n\}$.

Доведення. Нехай при всіх $1 \leq l \leq (n-1)!$ перестановка $\tau_{n(l-1)+1}$ має вигляд $\big(\sigma_l(1), \ldots, \sigma_l(n-1), n\big)$, а перестановки з номерами від $n(l-1)+2$ до nl отримаємо послідовними циклічними зсувами вліво на одиницю з перестановки $\tau_{n(l-1)+1}$. Тоді $\tau_1, \ldots, \tau_{n!}$ — (A)-нумерація. Справді, умова буде автоматично виконуватись за побудовою для всіх сусідніх перестановок крім, можливо, перестановок з номерами nl та $nl+1$, $1 \leq l < (n-1)!$, або з номерами $n!$ та 1. Але перестановка τ_{nl} має вигляд $\big(n, \sigma_l(1), \sigma_l(2), \ldots, \sigma_l(n-1)\big)$, а перестановка τ_{nl+1} — $\big(\sigma_{l+1}(1), \sigma_{l+1}(2), \ldots, \sigma_{l+1}(n-1), n\big)$. Тому умова буде виконуватись і для цих перестановок, бо перестановки σ_l та σ_{l+1} є сусідніми при (B)-нумерації. $\square$

Лема 2. Нехай $n \geq 4$ та існує (A)-нумерація $\sigma_1, \ldots, \sigma_{(n-1)!}$ перестановок множини $\{1, \ldots, n-1\}$. Тоді існує (B)-нумерація $\tau_1, \ldots, \tau_{n!}$ перестановок множини $\{1, \ldots, n\}$.

Доведення. Нехай при всіх $1 \leq l \leq (n-1)!$ перестановка $\tau_{n(l-1)+1}$ має вигляд $\big(n, \sigma_l(1), \ldots, \sigma_l(n-1)\big)$, а перестановки τ_{nl}, $\tau_{n(l-1)+2}$, $\tau_{n(l-1)+3}$, $\ldots \tau_{nl-1}$ (саме в такому порядку!) отримаємо послідовними циклічними зсувами вліво на одиницю з перестановки $\tau_{n(l-1)+1}$. Тоді $\tau_1, \ldots, \tau_{n!}$ — (B)-нумерація. Справді, умова буде виконуватись за побудовою для всіх сусідніх перестановок крім, можливо, перестановок з номерами nl та $nl+1$, $1 \leq l < (n-1)!$, або з номерами $n!$ та 1. Але перестановка τ_{nl} має вигляд $\big(\sigma_l(1), \sigma_l(2), \ldots, \sigma_l(n-1), n\big)$, а перестановка τ_{nl+1} — $\big(n, \sigma_{l+1}(1), \sigma_{l+1}(2), \ldots, \sigma_{l+1}(n-1)\big)$. Тому умова виконується і для цих перестановок, бо перестановки σ_l та σ_{l+1} є сусідніми при (A)-нумерації. $\square$

Зауважимо, що (B)-нумерація множини $\{1, \ldots, n\}$ існує при $n = 3:$

$$(1,2,3),\ (3,2,1),\ (2,1,3),\ (1,3,2),\ (2,3,1),\ (3,1,2),$$

та при $n = 4$:

$$\begin{gathered}
(1,2,3,4),\ (2,3,4,1),\ (3,4,1,2),\ (4,1,2,3), (3,1,2,4),\ (1,2,4,3),\\
(2,4,3,1),\ (4,3,1,2),\ (2,3,1,4),\ (3,1,4,2), (1,4,2,3),\ (4,2,3,1),\\
(2,1,3,4),\ (1,3,4,2),\ (3,4,2,1),\ (4,2,1,3), (3,2,1,4),\ (2,1,4,3),\\
(1,4,3,2),\ (4,3,2,1),\ (1,3,2,4),\ (3,2,4,1), (2,4,1,3),\ (4,1,3,2).
\end{gathered}$$

Тому за лемою 1 при $n = 4$ існує і (A)-нумерація множини $\{1,\dots,n\}$, а далі завдяки лемам 1 та 2 індукцією за n отримуємо, що (A)- та (B)-нумерації перестановок множини $\{1,\dots,n\}$ існують при всіх $n \geq 4$.
Відповідь: $n = 2$ або $n \geq 4$.

3–4 курси

1. Див. задачу **4** для 1-2 курсів.
2. Див. задачу **6** для 1-2 курсів.
3. Див. задачу **5** для 1-2 курсів.
4. Див. задачу **7** для 1-2 курсів.
5. Див. задачу **8** для 1-2 курсів.
6. Функція $f(a) = \int_{\mathbb{R}} xe^{ax}d\mu(x)$ коректно визначена, бо

$$|xe^{ax}| \leq (e^x + e^{-x})e^{ax} = e^{(a+1)x} + e^{(a-1)x}.$$

За теоремою про неперервну залежність інтеграла Лебега від параметра $f \in C(\mathbb{R})$. При деякому $\varepsilon > 0$ маємо $\mu([\varepsilon;+\infty)) > 0$. Тоді при $a > 0$

$$f(a) = \int_{(-\infty;0)} xe^{ax}d\mu(x) + \int_{[0;+\infty)} xe^{ax}d\mu(x).$$

Перший доданок прямує до 0 при $a \to \infty$ за теоремою Лебега про мажоровану збіжність, а другий доданок не менший за $\varepsilon e^{a\varepsilon}\mu([\varepsilon;+\infty)) \to +\infty$, $a \to +\infty$. Тому $f(a) \to +\infty$, $a \to +\infty$. Аналогічно $f(a) \to -\infty$, $a \to -\infty$. За теоремою Коші про проміжне значення існує таке a_0, що $f(a_0) = 0$. При $a_1 < a_2$ для усіх $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ маємо $x\left(e^{a_2x} - e^{a_1x}\right) > 0$, звідки $f(a_2) - f(a_1) = \int_{\mathbb{R}} x\left(e^{a_2x} - e^{a_1x}\right)d\mu(x) > 0$. Тому f строго зростає і шукане a_0 єдине.
7. Нехай τ_i — кількість членів послідовності $\{x_n,\ n \geq 0\}$, які дорівнюють i. Тоді $\{\tau_i,\ n \geq 0\}$ — незалежні однаково розподілені випадкові величини (це можна перевірити безпосереднім підрахунком імовірностей $P\{\tau_0 = k_0,\dots,\tau_n = k_n\}$). При цьому $P\{\tau_0 = k\} = p^{k-1}q$, $k \geq 1$. Покладемо $S_l = \sum\limits_{j=0}^{l}\tau_j$, $l \geq 0$, та $\sigma_n = \max\{k : S_k \leq n\},\ n \geq 1$. З посиленого закону великих чисел випливає, що з імовірністю 1

$$\frac{1}{l}S_l \to \mathsf{M}\tau_0, \quad l \to \infty.$$

Тоді $\dfrac{\sigma_n}{n} \to (\mathsf{M}\tau_0)^{-1}$, $n \to \infty$, м. н. Тепер

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \xi_{x_k} = \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{\sigma_n} \xi_l \tau_l + \frac{1}{n} r_n,$$

де $|r_n| \le |\xi_{\sigma_n+1}|\tau_{\sigma_n+1}$. Тому $\frac{1}{n} r_n \to 0$, $n \to \infty$, м. н. за рахунок умови $\mathsf{M}|\xi_0| < +\infty$. Використовуючи незалежність ξ та τ і посилений закон великих чисел, маємо

$$\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{\sigma_n} \xi_l \tau_l = \frac{\sigma_n}{n} \cdot \frac{1}{\sigma_n}\sum_{l=0}^{\sigma_n} \xi_l \tau_l \to 0, \quad n \to \infty, \quad \text{м. н.}$$

8. Нехай $S_k = \sum\limits_{i=1}^{k} X_i,\ T_k = \sum\limits_{i=1}^{k} X_i^2,\ 1 \le k \le 2n$. Маємо

$$\begin{aligned}
\mathsf{M}Y_{2n}^2 = \mathsf{M}\frac{S_{2n}^2}{T_{2n}} &= 1 + 2n(2n-1)\mathsf{M}\frac{X_1 X_n}{T_{2n}} = 1 + \frac{2n(2n-1)}{n^2}\mathsf{M}\frac{S_n(S_{2n}-S_n)}{T_{2n}} \le \\
&\le 1 + 4\mathsf{M}\frac{|S_n||S_{2n}-S_n|}{T_{2n}} \le 1 + 4\mathsf{M}\frac{|S_n||S_{2n}-S_n|}{\sqrt{T_n}\sqrt{T_{2n}-T_n}} = \\
&= 1 + 4\mathsf{M}\frac{|S_n|}{\sqrt{T_n}} \cdot \mathsf{M}\frac{|S_{2n}-S_n|}{\sqrt{T_{2n}-T_n}} = 1 + 4\left(\mathsf{M}\frac{|S_n|}{\sqrt{T_n}}\right)^2 = 1 + 4\left(\mathsf{M}Y_n\right)^2.
\end{aligned}$$

9. Див. задачу **9** для 1-2 курсів.