Відкрита студентська олімпіада механіко-математичного факультету

В. Б. Брайман, О. Г. Кукуш, Д. Ю. Мітін

Чергове математичне змагання студентів Київського університету було проведено 17 березня 2008 року. Традиційно до участі були запрошені представники інших вузів, а також найкращі учні старших класів ліцеїв Києва. Як завжди, окремо змагалися студенти I–II та III–IV курсів. У олімпіаді взяли участь понад 80 студентів. Далі ми наводимо прізвища переможців, умови та розв'язки запропонованих задач.

Переможці олімпіади серед студентів I–II курсів.

I місце

Фещенко Іван (мех-мат ф-т КНУ, 2 курс)
Юрченко Іван (мех-мат ф-т КНУ, 2 курс)
Танцюра Максим (мех-мат ф-т КНУ, 2 курс)

II місце

Шамов Олександр (мех-мат ф-т КНУ, 1 курс)
Ахтарієв Михайло (мех-мат ф-т КНУ, 1 курс)
Македонський Євген (мех-мат ф-т КНУ, 1 курс)
Медвідь Володимир (мех-мат ф-т КНУ, 1 курс)
Радченко Данило (мех-мат ф-т КНУ, 1 курс)
Заціха Ярослав (мех-мат ф-т КНУ, 2 курс)

III місце

Білокопитов Євген (мех-мат ф-т КНУ, 1 курс)
Набока Владислав (фізичний ф-т КНУ, 2 курс)
Панфілов Іван (фізичний ф-т КНУ, 2 курс)
Рагель Ярослав (мех-мат ф-т КНУ, 2 курс)
Шишацький Юрій (ліцей "Лідер", 11 клас)

Переможці олімпіади серед студентів III-IV курсів.

I місце

Туманян Арам (мех-мат ф-т КНУ, 4 курс)
Слободянюк Сергій (мех-мат ф-т КНУ, 3 курс)
Хоменко Лариса (мех-мат ф-т КНУ, 3 курс)
Клурман Олексій (мех-мат ф-т КНУ, 4 курс)

II місце

Кравець Олександр (мех-мат ф-т КНУ, 3 курс)
Петровський Дмитро (мех-мат ф-т КНУ, 4 курс)
Тимошкевич Тарас (мех-мат ф-т КНУ, 4 курс)

III місце

Лівінський Іван (мех-мат ф-т КНУ, 3 курс)

Попович Дмитро (мех-мат ф-т КНУ, 3 курс)
Зубач Федір (НТУУ "КПІ", 3 курс)

Завдання для 1–2 курсів

1. Знайти $\inf\{a+b+c:\ a,b,c>0,\ \sin a\cdot\sin b\cdot\sin c=\frac{3}{\pi}\,abc\}$. (В. Б. Брайман)
2. Нехай f — неперервна і обмежена на $\mathbb{R}$ функція така, що

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x+h)-2f(x)+f(x-h)|\to 0\quad\text{при}\quad h\to 0.$$

Чи обов'язково f рівномірно неперервна на $\mathbb{R}$? (А. В. Бондаренко, А. В. Примак)
3. Нехай f — чотири рази диференційовна, парна функція на $\mathbb{R}$, $g(x)=f(\sqrt{x}\,)$, $x\geq 0$. Довести, що функція g є двічі диференційовною при $x=0$, та знайти зв'язок між $g''(0)$ та похідними f в нулі. (О. Г. Кукуш)
4. Функція $f:[4,+\infty)\to\mathbb{R}$ задовольняє умови:
а) $f(x^2)=f(x)+[\log_2\log_2 x]^{-2}$, де $[t]$ — ціла частина t;
б) існує $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.
Довести, що f є монотонною. (О. Г. Кукуш)
5. Нехай многочлен $P(x)=x^n+p_{n-1}x^{n-1}+\ldots+p_0$ має рівно m $(2\leq m\leq n)$ різних комплексних коренів. Довести, що принаймні один з коефіцієнтів $p_{n-1},\ \ldots,\ p_{n-m}$ не дорівнює 0. (О. В. Рибак)
6. Нехай A — комплексна матриця розміру $n\times k$ така, що $A^T\cdot A=0$. Знайти найбільший можливий ранг матриці A. (В. Б. Брайман, О. В. Руденко)
7. Нехай $f\in C^\infty(\mathbb{R}\setminus\{0\})\cap C(\mathbb{R})$, причому

$$\forall\,n\in\mathbb{N}:\quad f(x)=o(x^n),\ x\to 0.$$

Чи обов'язково $f\in C^1(\mathbb{R})$? (О. Н. Нестеренко)
8. Для дійсної квадратної матриці $A=(a_{ij})_{i,j=1}^n$ покладемо $A^S=(\widetilde{a}_{ij})_{i,j=1}^n$, де

$$\widetilde{a}_{ij}=\begin{cases}a_{ji}, & \text{якщо } i+j \text{ непарне},\\ a_{ij}, & \text{якщо } i+j \text{ парне}.\end{cases}$$

Знайти усі квадратні матриці A такі, що для довільної матриці B такого ж розміру справджується рівність $(AB)^S=B^SA^S$. (В. Б. Брайман)
9. На координатній площині відмічено n точок з натуральними координатами. Відомо, що якщо точка (x,y) відмічена, то відмічені також усі точки з натуральними координатами (x',y'), для яких $x'\leq x$, $y'\leq y$. Для кожної відміченої точки (x,y) позначимо через $R(x,y)$ кількість відмічених точок (x',y'), для яких $x'\geq x$ та $y'\geq y$ (сама точка (x,y) теж враховується). Довести, що існує принаймні $n/4$ точок (x,y), для яких $R(x,y)$ є непарним числом. (О. В. Рибак)

Завдання для 3–4 курсів

1. Див. задачу **5** для 1-2 курсів.
2. Нехай ξ — така випадкова величина, що ξ та ξ^2 незалежні. Довести, що існує таке число c, що $\cos\xi = c$ майже напевно. (С. Новак, Великобританія)
3. Див. задачу **6** для 1-2 курсів.
4. Нехай f — це $2k$ разів диференційовна, парна функція на $\mathbb{R}$, $g(x) = f(\sqrt{x}\,), x \geq 0$. Довести, що функція g буде k разів диференційовною при $x = 0$, та знайти зв'язок між $g^{(k)}(0)$ та похідними f в нулі. (О. Г. Кукуш, В. Б. Брайман)
5. Нехай $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ — дійсні симетричні матриці, $\lambda_{\min}(A)$, $\lambda_{\min}(B)$ — їх найменші власні значення. Довести нерівність

$$|\lambda_{\min}(A) - \lambda_{\min}(B)| \leq n \cdot \max_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij} - b_{ij}|.$$

(О. В. Іванов, О. Г. Кукуш)
6. Нехай $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — неперервно диференційовне відображення, причому при всіх $x \in \mathbb{R}^2$ матриця $Df(x) + (Df(x))^T$ є невиродженою і $Df(0) = E$ (тут $Df(x)$ — матриця Якобі в точці x, E — одинична матриця). Чи обов'язково f є ін'єкцією? (О. Г. Кукуш)
7. Нехай ξ — випадкова величина з додатною щільністю розподілу. Чи завжди існують такі дві різні функції $f, g \in C(\mathbb{R})$, що $f(\xi)$ та $g(\xi)$ однаково розподілені?
(С. Новак, Великобританія)
8. Нехай $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ — вимірна за Лебегом функція, λ — міра Лебега на $[0,1]$. Відомо, що для будь-якої відкритої множини $A \subset [0,1]$

$$\int\limits_A f^{2n-1}(x)\, d\lambda(x) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Довести, що $\lambda\big(\{x : \ |f(x)| \geq 1\}\big) = 0$. (В. М. Радченко)
9. Нехай M — множина всіх невироджених матриць розміру 3×3 над полем $\mathbb{Z}_2$. Знайти таке найменше натуральне n, шо $A^n = E$ при всіх $A \in M$. (А. В. Бондаренко)

Розв'язки та вказівки

1–2 курси

1. Достатньо розглядати $0 < a, b, c < \frac{\pi}{2}$. При $0 < x < \frac{\pi}{2}$ покладемо $f(x) = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ і довизначимо за неперервністю $f(0) = 0$. Оскільки при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ маємо

$$f'(x) = \operatorname{ctg} x - \tfrac{1}{x} < 0,\ f''(x) = -\tfrac{1}{\sin^2 x} + \tfrac{1}{x^2} < 0,$$

то f монотонно спадає та опукла вгору. Звідси

$$\begin{aligned} f(\pi/6) = f(a) + f(b) + f(c) \geq &f(0) + f(a+b) + f(c) \geq \\ \geq &f(0) + f(0) + f(a+b+c) = f(a+b+c), \end{aligned}$$

а тому $a + b + c \geq \frac{\pi}{6}$. При $a, b \to 0+$ маємо $c \to \frac{\pi}{6}$, отже шуканий інфімум дорівнює $\frac{\pi}{6}$.
Відповідь: $\frac{\pi}{6}$.

2. Припустимо, що f не є рівномірно неперервною. Тоді для деякого $\varepsilon > 0$ існують такі $x_n \in \mathbb{R}$ та $\delta_n > 0, n \geq 1$, що $\delta_n \to 0$ при $n \to 0$ та $|f(x_n + \delta_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon$, $n \geq 1$. Зафіксуємо довільне $N \in \mathbb{N}$ та виберемо таке $n \geq 1$, що

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x - \delta_n) - 2f(x) + f(x + \delta_n)| \leq \frac{\varepsilon}{N}. \qquad (*)$$

Без обмеження загальності $f(x_n + \delta_n) - f(x_n) \geq \varepsilon$. З нерівності $(*)$ випливає, що при усіх $x \in \mathbb{R}$ маємо $f(x + \delta_n) - f(x) \geq f(x) - f(x - \delta_n) - \frac{\varepsilon}{N}$, звідки індукцією по k отримуємо $f\big(x_n + (k+1)\delta_n\big) - f\big(x_n + k\delta_n\big) \geq \varepsilon\big(1 - \frac{k}{N}\big)$, $0 \leq k \leq N - 1$. Додаючи ці нерівності, одержуємо $f(x_n + N\delta_n) - f(x_n) \geq \varepsilon\big(\frac{N}{N} + \frac{N-1}{N} + \ldots + \frac{1}{N}\big) = \frac{(N+1)\varepsilon}{2}$, а тому f не може бути обмеженою, суперечність.

Відповідь: обов'язково.

3. Оскільки f парна, то $f'(0) = f'''(0) = 0$. Декілька разів використовуючи правило Лопіталя та заміну $y = \sqrt{x}$, маємо

$$g'(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{f(\sqrt{x}\,) - f(0)}{x} = \lim_{y \to 0+} \frac{f(y) - f(0)}{y^2} = \\ = \lim_{y \to 0+} \frac{f'(y)}{2y} = \lim_{y \to 0+} \frac{f'(y) - f'(0)}{2y} = \frac{f''(0)}{2}$$

та

$$g''(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{g'(x) - g'(0)}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{f'(\sqrt{x}\,)}{2\sqrt{x}} - \frac{f''(0)}{2}}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{f'(\sqrt{x}\,) - f''(0)\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}} = \\ = \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{f''(\sqrt{x}\,)}{2\sqrt{x}} - \frac{f''(0)}{2\sqrt{x}}}{2 \cdot \frac{3}{2}\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0+} \frac{f''(\sqrt{x}\,) - f''(0)}{6x} = \lim_{y \to 0+} \frac{f''(y) - f''(0)}{6y^2} = \\ = \lim_{y \to 0+} \frac{f'''(y)}{12y} = \lim_{y \to 0+} \frac{f'''(y) - f'''(0)}{12y} = \frac{1}{12} f^{(4)}(0).$$

Відповідь: $g''(0) = \frac{1}{12} f^{(4)}(0)$.

4. Покладемо $I_k = [2^{2^k}, 2^{2^{k+1}})$, $k \geq 1$. Тоді $[4, +\infty) = \bigcup\limits_{k \geq 1} I_k$. Якщо $x \in I_k$, то $x^2 \in I_{k+1}$ та $f(x^2) - f(x) = [\log_2 \log_2 x]^{-2} = \frac{1}{k^2}$. Звідси при $x \in I_k$ з умови а) послідовно отримуємо

$$f(x) = f(x^2) - \tfrac{1}{k^2} = f(x^4) - \tfrac{1}{k^2} - \tfrac{1}{(k+1)^2} = \ldots = f(x^{2^n}) - \tfrac{1}{k^2} - \ldots - \tfrac{1}{(k+n-1)^2},\ n \geq 1. \qquad (*)$$

При $n \to \infty$ маємо $x^{2^n} \to \infty$ і, переходячи до границі у $(*)$, знаходимо

$$f(x) = c - \sum_{m \geq k} \tfrac{1}{m^2}, \ \ x \in I_k,\ k \geq 1, \qquad (**)$$

де $c := \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Для довільних $4 \leq x_1 \leq x_2$ якщо $x_1 \in I_{k_1}$, $x_2 \in I_{k_2}$, то $k_1 \leq k_2$. Тому внаслідок $(**)$ маємо $f(x_1) \leq f(x_2)$, тобто функція f неспадна.

5. Нехай $x_1, \ldots, x_m$ — різні корені $P(x)$ кратності $k_1, \ldots, k_m$ відповідно, $k_1 + \ldots + k_m = n$. Многочлени $P(x)$ та $P'(x)$ діляться на многочлен $Q(x) = (x - x_1)^{k_1 - 1} \ldots (x - x_k)^{k_m - 1}$ степеня $n - m$. Тоді $R(x) := nP(x) - xP'(x)$ теж ділиться на $Q(x)$, отже або це тотожний нуль, або $\deg R(x) \geq \deg Q = n - m$. Але ж

$$R(x) = nP(x) - xP'(x) = p_{n-1}x^{n-1} + 2p_{n-2}x^{n-2} + \ldots + np_0,$$

тому $R(x)$ може бути нулем лише коли $P(x) \equiv x^n$, що суперечить наявності $m \geq 2$ різних коренів $P(x)$. Отже, $\deg R \geq n - m$, а тому серед коефіцієнтів $p_{n-1}, \ldots, p_{n-m}$ є принаймні один відмінний від нуля.

6. Розглянемо скалярний добуток $(u, v) = u^T \cdot \overline{v},\ u, v \in \mathbb{C}^n$. Позначимо через L лінійну оболонку стовпчиків матриці A та через $\overline{L}$ лінійну оболонку векторів, які є комплексно спряженими до стовпчиків матриці A. Тоді $\dim L = \dim \overline{L} = \operatorname{rk} A$ та $L \perp \overline{L}$, звідки $\operatorname{rk} A \leq \min(\frac{n}{2}, k)$. Залишилось навести приклад матриці з рангом $\min([\frac{n}{2}], k)$.

Розглянемо $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ i & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & i & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$, тобто $A = (a_{jl}),\ a_{jl} = \begin{cases} 1, & l = 2j - 1,\ 1 \leq j \leq [\frac{n}{2}]; \\ i, & l = 2j,\ 1 \leq j \leq [\frac{n}{2}]; \\ 0 & \text{у інших випадках.} \end{cases}$

Тоді $A^T \cdot A = 0$ та $\operatorname{rk} A = \min([\frac{n}{2}], k)$.

Відповідь: $\min([\frac{n}{2}], k)$.

7. Нехай $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} \sin(e^{1/x^2}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ Тоді $f \in C(\mathbb{R}),\ f \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ та $|f(x)| \leq e^{-1/x^2} = o(x^n),\ x \to 0$, при кожному $n \geq 1$. При $x \neq 0$ похідна дорівнює $f'(x) = \frac{1}{x^3} \cdot \left(e^{-1/x^2} \sin(e^{1/x^2}) - \cos(e^{1/x^2})\right)$. Оскільки f' не є обмеженою у жодному околі точки $x = 0$, то $f \notin C^1(\mathbb{R})$.

Відповідь: ні, не обов'язково.

8. При $n \leq 2$ умову задовольняє будь-яка матриця A, бо для усіх матриць $M^S = M^T$.

При $n \geq 3$ внаслідок лінійності достатньо перевірити умову лише для матриць B, які містять рівно один ненульовий елемент b_{ij}. Зокрема при парному $i + j$ отримуємо, що $a_{ki} = 0$ при усіх $k \neq j$ та $a_{jj} = a_{ii}$. Тому при $n \geq 4$ маємо $A = \operatorname{diag}(\alpha, \beta, \alpha, \beta, \ldots)$, де α, β — деякі дійсні числа, а при $n = 3$ матриця A має вигляд $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & \delta & \alpha \end{pmatrix}$. Легко перевірити, що $n \geq 4$ усі такі матриці A задовольняють умову, а при $n = 3$ — лише матриця $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

Відповідь: A — довільна при $n \leq 2$, $A = \operatorname{diag}(\alpha, \beta, \alpha, \beta, \ldots), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ при $n \geq 3$.

9. Для невідмічених точок (x, y) також визначимо $R(x, y)$ як кількість відмічених точок (x', y'), для яких $x' \geq x$ та $y' \geq y$. Тоді для кожної відміченої точки виконується рівність $R(x, y) - R(x, y+1) - R(x+1, y) + R(x+1, y+1) = 1$. Справді, у лівій частині усі точки, крім (x, y), враховуються з плюсом і з мінусом однакову кількість разів, а точка (x, y) враховується тільки у $R(x, y)$. Отже, якщо точка (x, y) є відміченою, то серед чисел $R(x, y)$, $R(x, y+1)$, $R(x+1, y)$ та $R(x+1, y+1)$ є принаймні одне непарне, причому це число відповідає відміченій точці, бо для невідмічених точок (a, b) очевидно $R(a, b) = 0$.

Розіб'ємо множину натуральних точок на множини вигляду

$$\{(2r-1,2s-1),(2r-1,2s),(2r,2s-1),(2r,2s)\},\ (r,s)\in\mathbb{N}$$

та розглянемо ті з них, у яких є принаймні одна відмічена точка. Таких множин буде принаймні $n/4$ та згідно з умовою в кожній такій множині обов'язково буде відміченою точка $(2r-1,2s-1)$. Тому у кожній множині є відмічена точка (x,y), для якої $R(x,y)$ непарне, що і доводить потрібне твердження.

3–4 курси

1. Див. задачу **5** для 1-2 курсів.
2. Для довільного числа $a\ge 0$ внаслідок незалежності ξ та ξ^2 маємо

$$\mathrm{P}(\{|\xi|<a\})=\mathrm{P}(\{|\xi|<a,\xi^2<a^2\})=\mathrm{P}(\{|\xi|<a\})\mathrm{P}(\{\xi^2<a^2\})=\mathrm{P}^2(\{|\xi|<a\}),$$

звідки $\mathrm{P}(\{|\xi|<a\})=0$ або $\mathrm{P}(\{|\xi|<a\})=1$. Таким чином, функція розподілу випадкової величини $|\xi|$ має єдину точку стрибка a_0, звідки $|\xi|=a_0$ майже напевно та $\cos\xi=\cos|\xi|=\cos a_0$ майже напевно.
3. Див. задачу **6** для 1-2 курсів.
4. Оскільки f парна, то $f'(0)=f'''(0)=\ldots=f^{(2k-1)}(0)=0$. Розглянемо функцію

$$F(x)=f(x)-\Big(f(0)+\tfrac{1}{2}f''(0)x^2+\ldots+\tfrac{1}{(2k)!}f^{(2k)}(0)x^{2k}\Big),\ x\in\mathbb{R}.$$

Тоді F — $2k$ разів диференційовна, парна функція на $\mathbb{R}$, причому $F^{(n)}=0$, $0\le n\le 2k$. Відповідно

$$g(x)=f(0)+\tfrac{1}{2}f''(0)x+\ldots+\tfrac{1}{(2k)!}f^{(2k)}(0)x^k+G(x),\text{ де } G(x):=F(\sqrt{x}\,),\ x\ge 0. \qquad (*)$$

Покажемо, що функція G буде k разів диференційовною при $x=0$ та $G^{(k)}=0$. Звідси випливатиме, що k разів диференційовною буде і g, причому внаслідок $(*)$

$$g^{(k)}(0)=\tfrac{k!}{(2k)!}f^{(2k)}(0).$$

За формулою Тейлора з залишком у формі Пеано при кожному $0\le j\le 2k-1$ маємо $F^{(j)}(x)=o(x^{2k-j})$, $x\to 0+$. Відповідно

$$F^{(j)}(\sqrt{x}\,)=o(x^{k-\frac{j}{2}}),\ x\to 0+,\ \ 0\le j\le k\le 2k-1.$$

При $x>0$ та $1\le i\le k$ маємо

$$G^{(i)}(x)=\sum_{1\le j\le i}c_{ji}F^{(j)}(\sqrt{x}\,)x^{-i+\frac{j}{2}}=\sum_{1\le j\le i}c_{ji}\cdot o(x^{k-i}),\ x\to 0+,$$

де c_{ji} — деякі дійсні числа. Звідси при $0\le i\le k-1$ маємо $G^{(i)}(x)=o(x)$, $x\to 0+$.

Це дозволяє послідовно для $i=1,\ldots,k$ довести, що існує $G^{(i)}(0)=0$. Справді, якщо вже встановлено, що існує $G^{(i-1)}(0)=0$, то буде існувати і

$$G^{(i)}(0):=\lim_{x\to 0+}\tfrac{G^{(i-1)}(x)-G^{(i-1)}(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\tfrac{o(x)-0}{x}=0.$$

Відповідь: $g^{(k)}(0)=\frac{k!}{(2k)!}f^{(2k)}(0)$.

5. Позначимо $\Delta = \max\limits_{1 \le i,j \le n} |a_{ij} - b_{ij}|$. Внаслідок симетричності дійсних матриць A, B маємо (тут x — вектор-стовпчик, $\|x\|$ — евклідова норма)

$$|\lambda_{\min}(A) - \lambda_{\min}(B)| = \left| \min_{\|x\|=1} x^T A x - \min_{\|x\|=1} x^T B x \right| =$$
$$= \left| \max_{\|x\|=1} x^T(-A)x - \max_{\|x\|=1} x^T(-B)x \right| \le \max_{\|x\|=1} \left| x^T(-A)x - x^T(-B)x \right| =$$
$$= \max_{\|x\|=1} \left| x^T(B-A)x \right| \le \max_{\|x\|=1} \left| \sum_{i,j=1}^{n} (b_{i,j} - a_{i,j}) x_i x_j \right| \le \Delta \cdot \max_{\|x\|=1} \sum_{i,j=1}^{n} |x_i x_j| =$$
$$= \Delta \cdot \max_{\|x\|=1} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i| \right)^2 \le \Delta \cdot \max_{\|x\|=1} \left(n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) = n\Delta.$$

6. Покажемо, що при усіх $x \in \mathbb{R}^2$ матриця $J(x) := Df(x) + Df(x)^T$ є додатно визначеною. Справді, $J(x)$ — симетрична матриця і згідно задачі **5** для 3–4 курсів функція $\lambda(x) := \lambda_{\min}(J(x))$ є неперервною на $\mathbb{R}^2$. Але за умовою $\lambda(0) = 2 > 0$ та $\lambda(x) \ne 0$, $x \in \mathbb{R}^2$. Тому при кожному $x \in \mathbb{R}^2$ маємо $\lambda(x) > 0$, тобто $J(x)$ додатно визначена.

Припустимо, що при деяких $y \ne z$ маємо $f(y) = f(z)$. Для функції

$$g(t) = (z-y)^T f(y + t(z-y)),\ t \in [0,1],$$

маємо $g(0) = g(1)$ і за теоремою Ролля існує таке $\theta \in (0,1)$, що $g'(\theta) = 0$. Нехай $x_\theta = y + \theta(z-y)$. Тоді

$$g'(\theta) = (z-y)^T Df(x_\theta)(z-y) = \frac{1}{2}(z-y)^T \big(Df(x_\theta) + Df(x_\theta)^T\big)(z-y) =$$
$$= \frac{1}{2}(z-y)^T \big(J(x_\theta)\big)(z-y) = 0$$

і оскільки $y - z \ne 0$, то отримуємо суперечність з тим, що матриця $J(x_\theta)$ додатно визначена. Отже, f є ін'єкцією.

Відповідь: так, обов'язково.

7. Нехай F — функція розподілу ξ. Тоді F є неперервною бієкцією $\mathbb{R}$ на $(0,1)$, причому випадкова величина $F(\xi)$ рівномірно розподілена на $(0,1)$. Але тоді і випадкова величина $1 - F(\xi)$ рівномірно розподілена на $(0,1)$ і можна взяти $f(x) = F(x)$, $g(x) = 1 - f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Залишається зауважити, що $f \ne g$, бо f строго зростаюча а g строго спадна.

Відповідь: завжди.

8. Доведемо, наприклад, що $\lambda\big(\{x : f(x) \ge 1\}\big) = 0$. Нехай $B = \{x : f(x) \ge 1\}$. Припустимо, що $\lambda(B) = \varepsilon > 0$. Оскільки

$$\int\limits_{[0,1]} f^{2n-1}(x)\, d\lambda(x) = \int\limits_{(0,1)} f^{2n-1}(x)\, d\lambda(x) \to 0,\ n \to \infty,$$

то для будь-якої замкненої множини $F \subset [0,1]$ маємо

$$\int\limits_F f^{2n-1}(x)\,d\lambda(x) = \int\limits_{[0,1]} f^{2n-1}(x)\,d\lambda(x) - \int\limits_{[0,1]\setminus F} f^{2n-1}(x)\,d\lambda(x) \to 0,\ n\to\infty.$$

З регулярності міри Лебега на $[0,1]$ випливає, що існує така замкнена множина $F \subset B$, що $\lambda(F) \geq \frac{\varepsilon}{2}$. Тоді

$$\int\limits_F f^{2n-1}(x)\,d\lambda(x) \geq \int\limits_F 1\,d\lambda(x) \geq \frac{\varepsilon}{2} \not\to 0,\ n\to\infty,$$

суперечність. Аналогічно $\lambda\big(\{x:\ f(x)\leq -1\}\big)=0$.

9. Помітимо, що множина M є групою відносно множення матриць. Знайдемо порядок цієї групи. Перший стовпчик невиродженої матриці розміру 3×3 над $\mathbb{Z}_2$ можна обрати $2^3-1=7$ способами (довільний ненульовий), другий — $2^3-2=6$ способами (довільний лінійно незалежний з першим), а третій — $2^3-2^2=4$ способами (довільний лінійно незалежний з першими двома). Тому M містить $7\cdot 6\cdot 4=168=8\cdot 3\cdot 7$ матриць. За теоремою Силова в M є елементи порядків 3 та 7. Крім того, оскільки $\left(\begin{smallmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{smallmatrix}\right)^4=E$, але $\left(\begin{smallmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{smallmatrix}\right)^2\neq E$, то в M є елемент порядку 4. Таким чином, найменше натуральне n таке, що $A^n=E$ при усіх $A\in M$, є дільником $8\cdot 3\cdot 7$ та ділиться на $4\cdot 3\cdot 7$. Доведемо, що $n=4\cdot 3\cdot 7=84$. Для цього достатньо показати, що в M немає елементів порядку 8, тобто з $A^8=E$ та $A\in M$ випливає, що $A^4=E$. Над $\mathbb{Z}_2$ маємо

$$A^8-E=(A^4-E)(A^4+E)=(A^4-E)^2=\ldots=(A-E)^8=0.$$

Отже, многочлен $p(t)=(t-1)^8$ є анулюючим для A. Але мінімальний многочлен матриці A є дільником $p(t)$ та має щонайбільше степінь 3. Тому мінімальний многочлен матриці A є дільником многочлена $(t-1)^3$. Звідси випливає, що і многочлен $(t-1)^4$ анулює матрицю A, тобто $(A-E)^4=A^4-E=0$. Таким чином, $n=4\cdot 3\cdot 7=84$.

Відповідь: $n=84$.