Відкрита студентська олімпіада механіко-математичного факультету

В.Б. Брайман

Чергове математичне змагання студентів Київського національного університету імені Тараса Шевченка було проведено 27 лютого 2017 року. Олімпіада проходила окремо для студентів 1–2 та 3–4 курсів. В олімпіаді взяли участь студенти механіко-математичного факультету, факультету комп'ютерних наук та кібернетики, факультету радіофізики, електроніки та комп'ютерних систем КНУ, Інституту прикладного системного аналізу НТУУ "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського". Нижче ми наводимо прізвища переможців, умови та розв'язання запропонованих задач.

Переможці олімпіади серед студентів 1–2 курсів

I місце

Скибицький Нікіта Максимович (ф-т кібернетики КНУ, 1 курс)

II місце

Ківва Ярослав Сергійович (ф-т кібернетики КНУ, 1 курс)
Яковлєв Іван Володимирович (ф-т кібернетики КНУ, 2 курс)
Корчемна Вікторія Сергіївна (мех-мат ф-т КНУ, 2 курс)
Пушкін Денис Євгенович (ф-т кібернетики КНУ, 1 курс)

III місце

Назаркевич Ганна Ярославівна (ф-т кібернетики КНУ, 2 курс)
Коляденко Павло Павлович (ф-т кібернетики КНУ, 2 курс)
Манікін Борис Ігорович (мех-мат ф-т КНУ, 2 курс)
Мусієнко Олександр Вікторович (мех-мат ф-т КНУ, 1 курс)
Уразовський Андрій Владиславович (ф-т кібернетики КНУ, 1 курс)

Заохочувальна відзнака

Кучеренко Анастасія Олегівна (ф-т кібернетики КНУ, 2 курс)
Максимчук Антон Романович (мех-мат ф-т КНУ, 1 курс)
Чудаков Тимофій Сергійович (ф-т кібернетики КНУ, 1 курс)
Шуліков Арсеній Владиславович (ІПСА, НТУУ "КПІ", 2 курс)

Переможці олімпіади серед студентів 3–4 курсів

I місце

Дашков Олександр Олександрович (мех-мат ф-т КНУ, 4 курс)

II місце

Щеглов Микита Владиславович (мех-мат ф-т КНУ, 4 курс)

III місце

Палько Назарій Зіновійович (ф-т кібернетики КНУ, 3 курс)
Горецький Микола Андрійович (мех-мат ф-т КНУ, 4 курс)
Скуржанський Олександр Григорович (ф-т кібернетики КНУ, 3 курс)

Заохочувальна відзнака
Бахчеджиоглу Атілла Алперович (мех-мат ф-т КНУ, 4 курс)

Завдання для 1–2 курсів

1. Для кожного натурального n обчислити

$$\sum_{1\le q_1<q_2<\ldots<q_k\le n}\frac{1}{(q_1+\pi)(q_2+\pi)\ldots(q_k+\pi)},$$

де сума береться за всіма непорожніми підмножинами множини $\{1,2,\ldots,n\}$.
(М.П. Мороз)

2. Чи існує нескінченна сукупність підмножин множини цілих чисел $\{M_\alpha,\ \alpha\in\mathcal{A}\}$ така, що $\bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{B}}M_\alpha\neq\mathbb{Z}$ для довільної скінченної множини $\mathcal{B}\subset\mathcal{A}$, але $\bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{B}}M_\alpha=\mathbb{Z}$ для довільної нескінченної множини $\mathcal{B}\subset\mathcal{A}$? *(В.Г. Юрашев)*

3. Дано коло ω та його хорду AB. Знайти геометричне місце середин таких хорд CD кола ω, що коло з діаметром CD дотикається до прямої AB. *(В.Б. Брайман)*

4. Для довільних чисел $a,b\ge 0$ довести нерівність

$$\sqrt{a^2b^2+a^2b}+\sqrt{ab^2+b}+\sqrt{a+1}\le\tfrac{3}{2}\sqrt{(a+1)(b+1)(ab+1)}.$$

(В.Г. Юрашев)

5. Нехай $f,g\in C^{(1)}((-\infty;0])$ — невід'ємні функції такі, що $\min(f'(x),g'(x))\ge f(x)g(x)$ при всіх $x\le 0$. Довести, що $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ або $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=0$. *(О.В. Руденко)*

6. Нехай $n\ge 2$. Чи для будь-якої невиродженої матриці $A\in M_n(\mathbb{R})$ існує така матриця $B\in M_n(\mathbb{R})$, що обидві матриці AB та BA симетричні, але не діагональні?
(В.Б. Брайман)

7. Макс потай від Мінні обирає числа $a_1,a_3,\ldots,a_{2015}\in[-1;1]$, а Мінні потай від Макса обирає числа $a_2,a_4,\ldots,a_{2016}\in[-1;1]$. Потім вони будують многочлен P найменшого можливого степеня, для якого $P(i)=a_i$, $1\le i\le 2016$, та обчислюють $P(2017)$. Макс хоче зробити значення $P(2017)$ якомога більшим, а Мінні — якомога меншим. Яким буде $P(2017)$, якщо обидва гравці діють найкращим можливим чином? *(В.Б. Брайман)*

Завдання для 3–4 курсів

1. Нехай K — довільна множина в $\mathbb{R}^n$, міра Лебега якої дорівнює 1. Довести, що

$$\int_K\max\left(|x_1|,\ldots,|x_n|\right)d\lambda_n(\vec{x})\ge\frac{n}{2(n+1)}.$$

(А.В. Примак)

2. Чи існують додатні функції $f,g\in C^{(1)}(\mathbb{R})$ такі, що $\min(f'(x),g'(x))\ge f(x)g(x)$ при всіх $x\in\mathbb{R}$? *(О.В. Руденко)*

3. Див. задачу **6** для 1–2 курсів.

4. Див. задачу **7** для 1–2 курсів.

5. Нехай ξ — додатна випадкова величина, для якої $\mathsf{M}\xi^2 < \infty$. Чи обов'язково існує таке число $C > 0$, що $\mathsf{M}\left(\xi\, \mathrm{I}_{\{\xi > n\}}\right) \le Cn\, \mathsf{P}\left(\xi > n\right)$ при всіх $n \in \mathbb{N}$?

(С. Новак, Великобританія)

6. Нехай μ — така скінченна міра на борелевій σ-алгебрі в $\mathbb{R}$, що $\int_{\mathbb{R}} |x|^{3/2} d\mu(x) < \infty$. Чи може функція $f(x) = \int_{\mathbb{R}} |x+y|^{3/2} d\mu(y)$, $x \in \mathbb{R}$, мати два або більше строгих локальних мінімумів?

(О.Г. Кукуш)

7. Знайти такі числа a та b, що

$$\int_0^1 \frac{\ln x\, dx}{x+\varepsilon} \sim a|\ln \varepsilon|^b,\ \varepsilon \to 0+\,.$$

(О.Г. Кукуш)

Розв'язання задач

Завдання для 1–2 курсів

1. Позначимо S_n суму, яку потрібно обчислити. Зрозуміло, що $S_1 = \frac{1}{1+\pi}$. При $n > 1$ сума всіх доданків, у яких немає множника $\frac{1}{n+\pi}$, дорівнює S_{n-1}, а сума всіх доданків, які містять цей множник, дорівнює $\frac{1}{n+\pi}(S_{n-1}+1)$. Тому $S_n = S_{n-1} + \frac{1}{n+\pi}(S_{n-1}+1)$, тобто $S_n + 1 = (1 + \frac{1}{n+\pi})(S_{n-1}+1)$, $n \ge 2$. Звідси

$$S_n = (1+\tfrac{1}{1+\pi})(1+\tfrac{1}{2+\pi})\dots(1+\tfrac{1}{n+\pi}) - 1 = \tfrac{2+\pi}{1+\pi}\cdot\tfrac{3+\pi}{2+\pi}\cdot\ldots\cdot\tfrac{n+1+\pi}{n+\pi} - 1 = \tfrac{n+1+\pi}{1+\pi} - 1 = \tfrac{n}{1+\pi}.$$

Відповідь: $\frac{n}{1+\pi}$.

2. Наприклад, шуканими є множини $M_n = \mathbb{Z} \cap [-n; n]$, $n \in \mathbb{N}$.

Відповідь: існує.

3. Розглянемо систему координат, в якій коло має рівняння $x^2 + y^2 = 1$, а хорда AB лежить на прямій $x = a$, де $|a| < 1$. Нехай $M(x; y)$ — середина хорди CD кола ω (рис. 1). Оскільки хорда CD перпендикулярна до діаметра кола ω, який проходить через точку M, то $CM^2 = 1 - x^2 - y^2$. Відстань від M до прямої AB дорівнює $|x-a|$. Тому коло із центром M та радіусом CM дотикається до AB тоді й лише тоді, коли $CM^2 = (x-a)^2 \ne 0$, тобто $1 - x^2 - y^2 = (x-a)^2 \ne 0$. Звідси $2(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = 1 - \frac{a^2}{2}$. Це рівняння еліпса. Якщо підставимо у рівняння

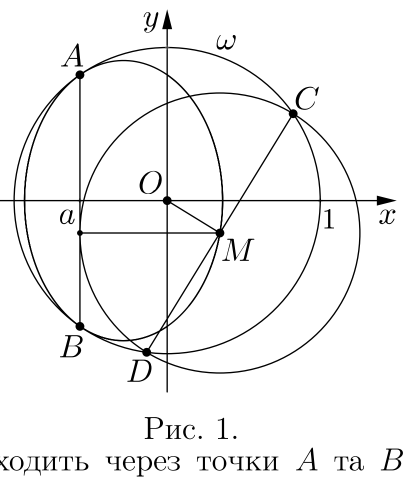

Рис. 1.

$x = a$, то дістанемо $y = \pm\sqrt{1-a^2}$. Тому еліпс проходить через точки A та B, а шукане геометричне місце — еліпс, з якого видалено ці дві точки. Зауважимо, що шукане геометричне місце точок повністю міститься всередині кола ω, а тому A та B є точками дотику еліпса та кола ω.

4. *I спосіб.* За нерівністю Коші-Буняковського для наборів чисел

$$\left(\sqrt{ab}, \sqrt{b}, 1\right) \text{ та } \left(\sqrt{ab+a}, \sqrt{ab+1}, \sqrt{a+1}\,\right)$$

маємо

$$\sqrt{a^2b^2+a^2b}+\sqrt{ab^2+b}+\sqrt{a+1} \leq \sqrt{2(ab+b+1)(ab+a+1)}.$$

Залишилося показати, що $2(ab+b+1)(ab+a+1) \leq \frac{9}{4}(a+1)(b+1)(ab+1)$, або

$$8(a^2b^2+a^2b+ab^2+3ab+a+b+1) \leq 9(a^2b^2+a^2b+ab^2+2ab+a+b+1),$$

$$a^2b^2+a^2b+ab^2+a+b+1 \geq 6ab.$$

Остання нерівність випливає з нерівності Коші.

II спосіб. Запишемо нерівність у вигляді $\frac{\sqrt{a^2b^2+a^2b}+\sqrt{ab^2+b}+\sqrt{a+1}}{\sqrt{(a+1)(b+1)(ab+1)}} \leq \frac{3}{2}$. Перетворимо її ліву частину та використаємо нерівність Коші:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{a^2b^2+a^2b}+\sqrt{ab^2+b}+\sqrt{a+1}}{\sqrt{(a+1)(b+1)(ab+1)}} &= \frac{\sqrt{a^2b}}{\sqrt{(a+1)(ab+1)}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{(a+1)(b+1)}}+\frac{1}{\sqrt{(b+1)(ab+1)}} = \\ &= \sqrt{\frac{a}{a+1}\cdot\frac{ab}{ab+1}}+\sqrt{\frac{1}{a+1}\cdot\frac{b}{b+1}}+\sqrt{\frac{1}{b+1}\cdot\frac{1}{ab+1}} \leq \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+1}+\frac{ab}{ab+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+1}+\frac{b}{b+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b+1}+\frac{1}{ab+1}\right) = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

5. Функції f та g невід'ємні та неспадні, оскільки $\min(f'(x), g'(x)) \geq f(x)g(x) \geq 0$ при всіх $x \leq 0$. Тому існують границі $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a \geq 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = b \geq 0$ та $f(x) \geq a$, $g(x) \geq b$ при всіх $x \leq 0$. Припустимо, що $a > 0$ та $b > 0$. Тоді $f'(x) \geq ab > 0$, $x \leq 0$. При $x < 0$ з теореми Лагранжа випливає, що $f(0)-f(x) \geq ab(0-x)$, тобто $f(x) \leq f(0)+abx$. Звідси $f(-f(0)/ab) \leq 0 < a$, суперечність. Отже, $a = 0$ або $b = 0$.

Зауваження. Неважко перевірити, що функції $f(x) = e^x + 1$ та $g(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$ задовольняють умову, але $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1 > 0$.

6. Покажемо, що для матриці $A = \operatorname{diag}(1, 2, \ldots, n)$ шуканої матриці B не існує. Справді, нехай $B = (b_{ij})$ — будь-яка матриця, для якої матриці $AB = (ib_{ij})$ та $BA = (jb_{ij})$ симетричні. При довільних $i \neq j$ маємо $ib_{ij} = jb_{ji}$ та $jb_{ij} = ib_{ji}$. Звідси $\frac{i}{j}b_{ij} = \frac{j}{i}b_{ij}$, а отже $b_{ij} = 0$ при всіх $i \neq j$. Таким чином, матриця B діагональна, але тоді матриці AB та BA теж діагональні.

Відповідь: ні.

7. Многочлен P найменшого можливого степеня, для якого $P(i) = a_i$, $1 \leq i \leq 2016$, можна побудувати як інтерполяційний многочлен Лагранжа

$$P(x) = \sum_{i=1}^{2016} a_i \ell_i(x), \quad \text{де} \quad \ell_i(x) = \prod_{\substack{1\leq j\leq 2016\\ j\neq i}} \frac{x-j}{i-j},\ 1 \leq i \leq 2016.$$

Отже, $P(2017)$ є лінійною комбінацією чисел a_i з коефіцієнтами $\ell_i(2017)$. Тому аби зробити $P(2017)$ якомога більшим, Макс має покласти $a_i = 1$, якщо $\ell_i(2017) > 0$, та $a_i = -1$, якщо $\ell_i(2017) < 0$. Аналогічно аби зробити $P(2017)$ якомога меншим, Мінні має покласти $a_i = -1$, якщо $\ell_i(2017) > 0$, та $a_i = 1$, якщо $\ell_i(2017) < 0$. Легко перевірити, що $\ell_i(2017) < 0$ при всіх непарних $1 \le i \le 2015$ та $\ell_i(2017) > 0$ при всіх парних $2 \le i \le 2016$. Отже, Макс покладе $a_1 = a_3 = \ldots = a_{2015} = -1$, а Мінні покладе $a_2 = a_4 = \ldots = a_{2016} = -1$. Таким чином, гравці побудують многочлен $P(x) \equiv -1$.

Відповідь: $P(2017) = -1$.

Завдання для 3–4 курсів

1. Нехай $L = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]^n$ — куб одиничної міри Лебега в $\mathbb{R}^n$ та $f(\vec{x}) = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$. Тоді $f(\vec{x}) \le \frac{1}{2}$ при $\vec{x} \in L$ та $f(\vec{x}) > \frac{1}{2}$ при $\vec{x} \notin L$. Звідси

$$\int_{K\setminus L} f(\vec{x}) d\lambda_n(\vec{x}) \ge \tfrac{1}{2}\,\lambda_n(K \setminus L) = \tfrac{1}{2}\,\lambda_n(L \setminus K) \ge \int_{L\setminus K} f(\vec{x}) d\lambda_n(\vec{x}),$$

а отже

$$\int_K f(\vec{x}) d\lambda_n(\vec{x}) - \int_L f(\vec{x}) d\lambda_n(\vec{x}) = \int_{K\setminus L} f(\vec{x}) d\lambda_n(\vec{x}) - \int_{L\setminus K} f(\vec{x}) d\lambda_n(\vec{x}) \ge 0.$$

Таким чином, достатньо розглянути інтеграл для випадку $K = L$.

Покладемо $F(t) = \lambda_n(\{\vec{x} \in L, f(\vec{x}) \le t\}) = (2t)^n$, $0 \le t \le \frac{1}{2}$. Тоді

$$\int_L f(\vec{x}) d\lambda_n(\vec{x}) = \int_0^{\frac{1}{2}} t\, dF(t) = \int_0^{\frac{1}{2}} t \cdot n2^n t^{n-1}\, dt = \frac{n}{2(n+1)}.$$

2. Припустимо, що такі функції існують. Покладемо $h(x) = f(x)g(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Тоді

$$h' = f'g + fg' \ge fg^2 + f^2 g \ge 2\sqrt{f^3 g^3} = 2\sqrt{h^3}, \quad \frac{h'}{2\sqrt{h^3}} \ge 1, \text{ тобто } \left(\frac{1}{\sqrt{h}}\right)' \le -1.$$

Тому при всіх $x > 0$ маємо $\frac{1}{\sqrt{h(x)}} \le \frac{1}{\sqrt{h(0)}} - x$, що неможливо при $x > \frac{1}{\sqrt{h(0)}}$, суперечність.

Відповідь: не існують.

5. Нехай випадкова величина ξ набуває значення $n!$ з імовірністю $p_n > 0$, $n \ge 1$. Тоді якщо $\xi > n!$, то $\xi \ge (n+1)!$, звідки $\mathsf{M}\left(\xi\, \mathrm{I}_{\{\xi > n!\}}\right) \ge (n+1)!\, \mathsf{P}\left(\xi > n!\right)$ та

$$\frac{\mathsf{M}\left(\xi\, \mathrm{I}_{\{\xi > n!\}}\right)}{n!\, \mathsf{P}\left(\xi > n!\right)} \ge \frac{(n+1)!}{n!} = n + 1,\ n \ge 1.$$

Отже, не існує такого числа $C > 0$, що $\mathsf{M}\left(\xi\, \mathrm{I}_{\{\xi > n\}}\right) \le Cn\, \mathsf{P}\left(\xi > n\right)$ при всіх $n \in \mathbb{N}$.

Залишилося зауважити, що $\mathsf{M}\xi^2 < \infty$ за умови, що ряд $\sum\limits_{n\ge 1} (n!)^2 p_n$ збігається. Наприклад, це так при $p_n = \frac{p}{(n!)^3}$, де p є таким, що $\sum\limits_{n\ge 1} p_n = 1$.

Відповідь: не обов'язково.

6. Покажемо, що $f(x) < \infty$ при всіх $x \in \mathbb{R}$. Справді, функція $g(t) = |t|^{3/2}$ опукла вниз на $\mathbb{R}$, тому $\left|\frac{x+y}{2}\right|^{3/2} \le \frac{|x|^{3/2}+|y|^{3/2}}{2}$, $|x+y|^{3/2} \le \sqrt{2}(|x|^{3/2} + |y|^{3/2})$, а отже

$$f(x) \le \sqrt{2}\,|x|^{3/2}\mu(\mathbb{R}) + \sqrt{2}\int_{\mathbb{R}} |y|^{3/2} d\mu(y) < \infty,\ x \in \mathbb{R}.$$

Також внаслідок опуклості функції g при всіх $u, v \in \mathbb{R}$ та $\lambda \in [0;1]$ маємо

$$f(\lambda u + (1-\lambda)v) = \int_{\mathbb{R}} |\lambda u + (1-\lambda)v + y|^{3/2} d\mu(y) \le$$
$$\le \int_{\mathbb{R}} \lambda |u+y|^{3/2} d\mu(y) + \int_{\mathbb{R}} (1-\lambda)|v+y|^{3/2} d\mu(y) = \lambda f(u) + (1-\lambda) f(v),$$

тобто функція f опукла вниз на $\mathbb{R}$.

Припустимо, що $x_1 < x_2$ — точки строгих локальних мінімумів функції f. Без обмеження загальності $f(x_1) \le f(x_2)$. Оскільки функція f опукла вниз, то при всіх $x \in (x_1; x_2)$ маємо $f(x) \le \max(f(x_1), f(x_2)) = f(x_2)$. Але тоді x_2 не є точкою строгого локального мінімуму, суперечність.

Відповідь: не може.

7. Нехай $0 < \varepsilon < 1$. Тоді

$$\int_0^1 \frac{\ln x\, dx}{x+\varepsilon} = \Big| x = \varepsilon t \Big| = \int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{(\ln\varepsilon + \ln t)\, dt}{t+1} =$$
$$= \ln\varepsilon \int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{dt}{t+1} + \int_0^1 \frac{\ln t\, dt}{t+1} + \int_1^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{\ln t\, dt}{t} - \int_1^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{\ln t\, dt}{t(t+1)}.$$

Зауважимо, що

$$\int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{dt}{t+1} = \ln\left(\tfrac{1}{\varepsilon} + 1\right) = \ln(1+\varepsilon) - \ln\varepsilon = -\ln\varepsilon + o(1),\ \varepsilon \to 0+,$$

$$\int_1^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{\ln t\, dt}{t} = \frac{1}{2}\left(\ln\tfrac{1}{\varepsilon}\right)^2 = \frac{1}{2}(\ln\varepsilon)^2 \ \text{ та } \ \int_0^1 \frac{\ln t\, dt}{t+1} - \int_1^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{\ln t\, dt}{t(t+1)} = O(1),\ \varepsilon \to 0+,$$

оскільки інтеграли $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t\, dt}{t+1}$ та $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln t\, dt}{t(t+1)}$ збігаються.

Тому

$$\int_0^1 \frac{\ln x\, dx}{x+\varepsilon} = -(\ln\varepsilon)^2 + o(\ln\varepsilon) + \frac{1}{2}(\ln\varepsilon)^2 + O(1) = -\frac{1}{2}(\ln\varepsilon)^2 + o((\ln\varepsilon)^2),\ \varepsilon \to 0+,$$

а отже

$$\int_0^1 \frac{\ln x\, dx}{x+\varepsilon} \sim -\frac{1}{2}(\ln\varepsilon)^2,\ \varepsilon \to 0+.$$

Відповідь: $a = -\frac{1}{2}$, $b = 2$.