Відкрита студентська олімпіада механіко-математичного факультету

В.Б. Брайман, О.Н. Нестеренко

Чергове математичне змагання студентів Київського національного університету імені Тараса Шевченка було проведено 10 березня 2015 року. Олімпіада проходила окремо для студентів 1–2 та 3–4 курсів. Серед учасників змагань більшість складали, звичайно, студенти механіко-математичного факультету, але були і представники факультету кібернетики та фізичного факультету КНУ, факультету інформатики та обчислювальної техніки НТУУ "КПІ". Нижче ми наводимо прізвища переможців, умови та розв'язання запропонованих задач.

Переможці олімпіади серед студентів 1–2 курсів

I місце

Хілько Данило Ігорович (мех-мат ф-т КНУ, 2 курс)
Шатохін Михайло Вікторович (мех-мат ф-т КНУ, 2 курс)
Щеглов Микита Владиславович (мех-мат ф-т КНУ, 2 курс)

II місце

Вовченко Владислав Олегович (мех-мат ф-т КНУ, 2 курс)
Дашков Олександр Олександрович (мех-мат ф-т КНУ, 2 курс)
Щетинін Кирил Володимирович (ф-т кібернетики КНУ, 2 курс)

III місце

Бахчеджиоглу Атілла Алперович (мех-мат ф-т КНУ, 2 курс)
Діомідов Євгеній Олексійович (ф-т кібернетики КНУ, 1 курс)
Кузьмин Олексій Володимирович (ф-т кібернетики КНУ, 2 курс)
Горецький Микола Андрійович (мех-мат ф-т КНУ, 2 курс)
Митрофанов Вадим Євгенович (мех-мат ф-т КНУ, 1 курс)
Харитонова Олена Олексіївна (мех-мат ф-т КНУ, 2 курс)

Переможці олімпіади серед студентів 3–4 курсів

I місце

Руденко Олександр Вячеславович (мех-мат ф-т КНУ, 3 курс)

II місце

Ківва Богдан Сергійович (мех-мат ф-т КНУ, 3 курс)
Чаудхарі Максим Субхашович (мех-мат ф-т КНУ, 3 курс)

III місце

Завадський Дмитро Вікторович (мех-мат ф-т КНУ, 3 курс)

Завдання для 1–2 курсів

1. Чи можуть середина та один з кінців відрізка лежати на гіперболі $y = \frac{1}{x}$, а інший кінець відрізка — на гіперболі $y = \frac{8}{x}$? *(В.Б. Брайман)*

2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} (1+\ \ x_1)(1+\ \ x_2)\dots(1+\ \ x_n) = & 2, \\ (1+2x_1)(1+2x_2)\dots(1+2x_n) = & 3, \\ \quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots & \\ (1+nx_1)(1+nx_2)\dots(1+nx_n) = & n+1. \end{cases}$$

(В.Г. Юрашев)

3. Неперервна дійсна функція f на $[0,1]$ не є монотонною. Довести, що існують числа $0 \le x < y < z \le 1$ такі, що $z-y = y-x$ та $(f(z)-f(y))(f(y)-f(x)) < 0$. *(О.В. Руденко)*

4. Нехай f — бієкція на скінченній множині X. Довести, що кількість множин $A \subset X$, для яких $f(A) = A$, є натуральним степенем двійки. *(В.Г. Юрашев)*

5. Більбо задумав дійсні числа x, y та повідомив Голлуму $x^n + y^n$ та $x^k + y^k$. Знайти всі натуральні n, k, при яких Голлум може визначити xy. *(В.Б. Брайман)*

6. Нехай $a_0, a_1, \dots, a_n$ — дійсні числа, не всі з яких є рівними. Довести, що розв'язок рівняння

$$2^n \sum_{i=0}^{n} a_i e^{a_i x} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a_i \cdot \sum_{i=0}^{n} e^{a_i x}$$

існує та єдиний. *(О.Г. Кукуш, С.В. Шкляр)*

7. Нехай A — вироджена матриця розміру $n \times n$, а B, C — вектори-стовпчики розміру $n \times 1$. Довести, що матриця $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C^{\mathrm{T}} & 0 \end{smallmatrix}\right)$ є виродженою тоді й лише тоді, коли

$$\det(A - BC^{\mathrm{T}}) = 0.$$

(С.В. Шкляр)

Завдання для 3–4 курсів

1. Чи є послідовність функцій

$$f_n(x) = \sin^n \pi x \, \mathrm{I}_{[0,n]}(x),\ n \ge 1,$$

збіжною за мірою Лебега на $\mathbb{R}$? *(В.М. Радченко)*

2. Нехай $f \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $B \subset f(\mathbb{R}^2)$ — компакт. Довести, що існує компакт $A \subset \mathbb{R}^2$ такий, що $f(A) = B$. *(О.Н. Нестеренко, А.В. Чайковський)*

3. Нехай K_C — клас випадкових величин з розподілом, зосередженим на $[0,1]$, та щільністю $p(x) \le C$, $x \in [0,1]$. Довести, що існує число $a(C) > 0$ таке, що $\mathsf{D}\xi > a(C)$ для всіх $\xi \in K_C$. *(Ю.С. Мішура)*

4. Див. задачу **5** для 1–2 курсів.

5. Нехай ξ — випадкова величина, для якої $\mathsf{P}(\xi > 0) > 0$ та $\mathsf{M}e^{a\xi} < \infty$ при всіх $a > 0$. Довести, що існує таке число $\sigma > 0$, що $\mathsf{M}e^{2\sigma\xi} = 2\mathsf{M}e^{\sigma\xi}$. *(О.Г. Кукуш)*

6. Див. задачу **7** для 1–2 курсів.

7. Довести, що для довільних $x_1 < -1$, $x_2 > 1$, $y_1 \ge -1$, $y_2 \ge -1$ диференціальне рівняння

$$xy' = \sqrt{1 + (y')^2} + y$$

має розв'язок $y(\cdot) \in C^1(\mathbb{R})$ такий, що $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$. *(І.О. Парасюк)*

Розв'язання задач
Завдання для 1–2 курсів

1. Нехай координати кінців відрізка $(a, \frac{1}{a})$ та $(b, \frac{8}{b})$. Тоді середина відрізка має координати $(\frac{a+b}{2}, \frac{1}{2a} + \frac{4}{b})$. Якщо ця точка належить гіперболі $y = \frac{1}{x}$, то $\frac{a+b}{2}(\frac{1}{2a} + \frac{4}{b}) = 1$, звідки

$$\tfrac{1}{4} + \tfrac{b}{4a} + 2 + \tfrac{2a}{b} = 1, \quad \tfrac{b}{4a} + \tfrac{2a}{b} = -\tfrac{5}{4}, \quad \left(\tfrac{b}{a}\right)^2 + 5\tfrac{b}{a} + 8 = 0.$$

Але квадратне рівняння $x^2 + 5x + 8 = 0$ не має дійсних коренів, суперечність.

Відповідь: Не можуть.

2. Розглянемо многочлен $P(t) = (1 + tx_1)(1 + tx_2)\ldots(1 + tx_n)$. Цей многочлен має степінь не вище за n, внаслідок системи $P(k) = k + 1$, $1 \le k \le n$, а також $P(0) = 1$. Таким чином, многочлен $P(t) - t - 1$ степеня не вище за n має $n + 1$ корінь, а отже є тотожно нульовим. Тоді $(1 + tx_1)(1 + tx_2)\ldots(1 + tx_n) \equiv 1 + t$. Звідси одне з чисел $x_1, \ldots, x_n$ дорівнює 1, а решта з цих чисел дорівнює 0.

Відповідь: $(1, 0, \ldots, 0)$ та всі перестановки цих чисел.

3. Припустимо, що існує неперервна не монотонна функція f, для якої

$$\big(f(z) - f(y)\big)\big(f(y) - f(x)\big) \ge 0$$

при всіх $0 \le x < y < z \le 1$ таких, що $z - y = y - x$. Зокрема це означає, що для будь-яких $u, v \in [0, 1]$ якщо $f(u) \le f(v)$, то $f(u) \le f(\frac{u+v}{2}) \le f(v)$. Без обмеження загальності $f(0) \le f(1)$ (інакше розглянемо замість f функцію $-f$). Тоді послідовно дістаємо

$$f(0) \le f(\tfrac{1}{2}) \le f(1), \quad f(0) \le f(\tfrac{1}{4}) \le f(\tfrac{1}{2}) \le f(\tfrac{3}{4}) \le f(1), \quad \ldots$$

Індукцією за n неважко довести, що

$$f(0) \le f(\tfrac{1}{2^n}) \le f(\tfrac{2}{2^n}) \le \ldots \le f(\tfrac{2^n-1}{2^n}) \le f(1) \text{ при всіх } n \ge 0.$$

Покажемо, що функція f неспадна на $[0, 1]$. Для довільних чисел $0 \le a < b \le 1$ покладемо $a_n = \frac{[2^n a]}{2^n}$, $b_n = \frac{[2^n b]}{2^n}$, $n \ge 0$. Оскільки $[2^n a] \le [2^n b]$, то $f(a_n) \le f(b_n)$. Але $a_n \to a$, $b_n \to b$ при $n \to \infty$, тому внаслідок неперервності функції f маємо

$$f(a) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \le \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(b).$$

Таким чином, f є монотонною на $[0, 1]$, суперечність з припущенням.

4. Бієкція на скінченній множині X — те саме, що перестановка елементів множини X. Розкладемо перестановку f на цикли. Зрозуміло, що множина $A \subset X$ задовольняє умову $f(A) = A$ тоді й лише тоді, коли разом з кожним своїм елементом вона містить всі елементи цикла, якому цей елемент належить. Тому кожна така множина A є об'єднанням усіх елементів з деякої множини циклів перестановки f. Отже, якщо перестановка f містить k циклів, то існує 2^k множин A, для яких $f(A) = A$.

5. Якщо обидва числа n та k непарні, то Більбо повідомить Голлуму числа 0 та 0, якщо він задумав числа $x = 1$ та $y = -1$ або числа $x = 2$ та $y = -2$. Якщо ж обидва числа n та k парні, то Більбо повідомить Голлуму числа 2 та 2, якщо він задумав числа $x = 1$ та $y = 1$ або числа $x = 1$ та $y = -1$. Таким чином, Голлум не зможе визначити xy, якщо числа n та k мають однакову парність.

Надалі без обмеження загальності будемо розглядати випадок, коли n непарне та k парне. Нехай Більбо задумав числа $x \le y$ та повідомив Голлуму числа $x^n + y^n = a$ та $x^k + y^k = b$. Тоді $x^n = \frac{a}{2} - t$, $y^n = \frac{a}{2} + t$ при деякому $t \ge 0$. Звідси

$$x = \sqrt[n]{\tfrac{a}{2} - t}, \quad y = \sqrt[n]{\tfrac{a}{2} + t} \quad \text{та} \quad x^k + y^k = \sqrt[n]{\left(\tfrac{a}{2} - t\right)^k} + \sqrt[n]{\left(\tfrac{a}{2} + t\right)^k}.$$

Оскільки $xy = \sqrt[n]{\frac{a^2}{4} - t^2}$ є спадною функцією від t при $t \ge 0$, то Голлум зможе визначити xy тоді й лише тоді, коли при жодному b рівність

$$\sqrt[n]{\left(\tfrac{a}{2} - t\right)^k} + \sqrt[n]{\left(\tfrac{a}{2} + t\right)^k} = b$$

не може виконуватися при двох різних значеннях $t \ge 0$. Ця умова очевидно виконується, якщо $a = 0$. При $a \ne 0$ після заміни $t = \frac{|a|}{2}s$, $b = \sqrt[n]{(\frac{a}{2})^k}\, c$ рівність набуває вигляду

$$\sqrt[n]{(1-s)^k} + \sqrt[n]{(1+s)^k} = c.$$

Отже, Голлум зможе визначити xy, якщо функція $f(s) = \sqrt[n]{(1-s)^k} + \sqrt[n]{(1+s)^k}$ не набуває жодного значення двічі при $s \ge 0$. Досліджуючи функцію $f(s)$ на монотонність за допомогою похідної, дістаємо, що при $k/n < 1$ ця неперервна функція спадає на $(0, 1)$ та зростає на $(1, +\infty)$, а при $k/n > 1$ зростає на $[0, +\infty)$ (рис. 1). Тому Голлума влаштовують лише значення $k > n$.

Відповідь: n непарне, k парне та $n < k$ або k непарне, n парне та $k < n$.

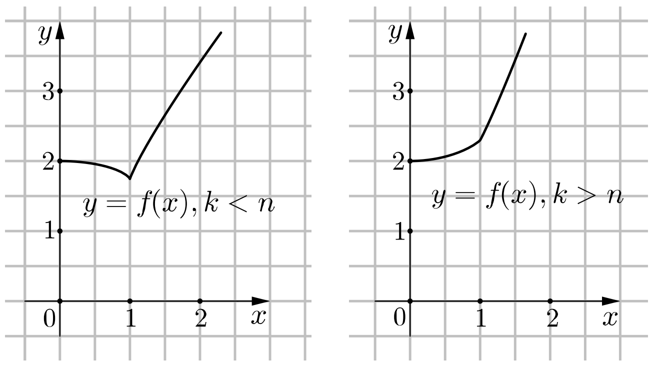

Рис. 1.

6. Розглянемо функцію

$$f(x) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} a_i e^{a_i x}}{\sum\limits_{i=0}^{n} e^{a_i x}}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Похідна цієї функції

$$f'(x) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} a_i^2 e^{a_i x} \cdot \sum\limits_{i=0}^{n} e^{a_i x} - \left(\sum\limits_{i=0}^{n} a_i e^{a_i x}\right)^2}{\left(\sum\limits_{i=0}^{n} e^{a_i x}\right)^2} > 0,\ x \in \mathbb{R}.$$

Справді, за нерівністю Коші-Буняковського вираз у чисельнику є невід'ємним та може дорівнювати 0 лише за умови, що набори чисел

$$\left(a_0 e^{a_0 x/2}, \ldots, a_n e^{a_n x/2}\right) \text{ та } \left(e^{a_0 x/2}, \ldots, e^{a_n x/2}\right)$$

пропорційні. Ця умова порушується, оскільки не всі з чисел $a_0, \ldots, a_n$ є рівними. Отже, функція f строго зростає на $\mathbb{R}$.

Покладемо $m = \min\{a_i, 0 \le i \le n\}$, $M = \max\{a_i, 0 \le i \le n\}$. Тоді $f(x) \to m$ при $x \to -\infty$ та $f(x) \to M$ при $x \to +\infty$, а тому неперервна строго монотонна функція f набуває кожне значення з інтервала (m, M) рівно в одній точці. Залишається зауважити, що рівняння з умови задачі можна записати у вигляді $f(x) = \frac{1}{2^n} \sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i a_i$ та $m < \frac{1}{2^n} \sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i a_i < M$, оскільки не всі з чисел $a_0, \ldots, a_n$ є рівними.

7. Спочатку покажемо, що $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & B \\ C^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix}$. Справді, в розкладі визначника матриці $\begin{pmatrix} A & B \\ C^{\mathrm{T}} & d \end{pmatrix}$ за останнім рядком число d множиться на $\det A = 0$, тому цей визначник не залежить від вибору d.

Нехай тепер I — одинична матриця розміру $n \times n$, O — нульовий вектор-стовпчик розміру $n \times 1$. Тоді

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & B \\ O^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A-BC^{\mathrm{T}} & O \\ C^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix},$$

а отже

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A & B \\ C^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} I & B \\ O^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} A-BC^{\mathrm{T}} & O \\ C^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det(A - BC^{\mathrm{T}}).$$

Звідси очевидно випливає твердження задачі.

Завдання для 3–4 курсів

1. Оскільки $f_n \to 0 \pmod{\lambda_1}$ при $n \to \infty$ (тут λ_1 — міра Лебега на $\mathbb{R}$), то достатньо перевірити, чи збігається послідовність за мірою Лебега до 0. Доведемо, що збіжності за мірою немає. Для цього покажемо, що

$$\lambda_1\Big(\big\{x \in \mathbb{R} : |f_n(x)| \ge \tfrac{1}{2}\big\}\Big) = \lambda_1\Big(\big\{x \in [0, n] : |\sin \pi x| \ge \tfrac{1}{\sqrt[n]{2}}\big\}\Big) = n\Big(1 - \tfrac{2}{\pi} \arcsin \tfrac{1}{\sqrt[n]{2}}\Big) \not\to 0.$$

Справді, при $t \in [0, 1]$ маємо $\arcsin t \le \frac{\pi}{2} t$. Тому

$$n\Big(1 - \tfrac{2}{\pi} \arcsin \tfrac{1}{\sqrt[n]{2}}\Big) \ge n\Big(1 - \tfrac{1}{\sqrt[n]{2}}\Big) = \frac{2^{1/n} - 1}{2^{1/n} \cdot 1/n} \to \ln 2 > 0,\ n \to \infty.$$

Відповідь: Збіжності за мірою немає.
2. Оскільки $B \subset f(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}$ — компакт, то існують числа $y_* = \min B$ та $y^* = \max B$, причому $y_* = f(x_*)$, $y^* = f(x^*)$ для деяких $x_*, x^* \in \mathbb{R}^2$. Покладемо

$$[x_*, x^*] = \{(1-t)x_* + tx^*,\, t \in [0,1]\} \subset \mathbb{R}^2, \quad A = [x_*, x^*] \cap f^{-1}(B).$$

Тоді $[x_*, x^*]$ — компакт, множина $f^{-1}(B)$ замкнена в $\mathbb{R}^2$ як прообраз замкненої множини при неперервному відображенні, а множина A компактна як замкнена підмножина компактної множини. Залишилося показати, що $f(A) = B$. Розглянемо функцію $g(t) = f((1-t)x_* + tx^*)$, $t \in [0,1]$. Оскільки $g(0) = f(x_*) = y_*$, $g(1) = f(x^*) = y^*$ та $g \in C([0,1])$, то g набуває всіх значень з $[y_*, y^*]$ на відрізку $[0,1]$. Тому f набуває всіх значень з $[y_*, y^*]$ на $[x_*, x^*]$. Отже, $B \subset f([x_*, x^*])$, звідки

$$f(A) = f([x_*, x^*] \cap f^{-1}(B)) = B.$$

3. Покладемо $m = \mathsf{M}\xi$ та $\delta = \frac{1}{3C}$. Розглянемо довільну випадкову величину $\xi \in K_C$. Оскільки

$$\mathsf{P}(|\xi - m| < \delta) = \int_{m-\delta}^{m+\delta} p(x)dx \le 2C\delta = \tfrac{2}{3},$$

то $\mathsf{P}(|\xi - m| \ge \delta) \ge \frac{1}{3}$. Тоді

$$\mathsf{D}\xi = \mathsf{M}(\xi - m)^2 \ge \mathsf{M}(\xi - m)^2 \mathrm{I}_{\{|\xi - m| \ge \delta\}} \ge \delta^2\, \mathsf{P}(|\xi - m| \ge \delta) \ge \tfrac{\delta^2}{3} = \tfrac{1}{27C^2},$$

тобто можна покласти $a(C) = \frac{1}{27C^2}$.
5. Нехай $f(a) = \frac{\mathsf{M}e^{2a\xi}}{\mathsf{M}e^{a\xi}}$, $a \ge 0$. Доведемо, що ця функція є неперервною. При $0 \le a \le c$ маємо

$$e^{a\xi} \le e^{c\xi}\, \mathrm{I}_{\{\xi \ge 0\}} + \mathrm{I}_{\{\xi < 0\}} \le e^{c\xi} + 1 \in L(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}).$$

Звідси випливає, що функція $g(a) = \mathsf{M}e^{a\xi}$ неперервна на $[0,c]$ при довільному $c > 0$, а оскільки $g(a) > 0$, $a \ge 0$, то і функція $f(a) = \frac{g(2a)}{g(a)}$ є неперервною.

Покажемо, що $f(a) \to +\infty$ при $a \to +\infty$. Зауважимо, що за неперервністю міри знизу $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}(\xi > \frac{1}{n}) = \mathsf{P}(\xi > 0) > 0$, тому при деякому $N \ge 1$ маємо $\mathsf{P}(\xi > \frac{1}{N}) > 0$. Тоді

$$f(a) = \frac{\mathsf{M}e^{2a\xi}}{\mathsf{M}e^{a\xi}} \ge \mathsf{M}e^{a\xi} \ge e^{\frac{a}{N}}\mathsf{P}(\xi > \tfrac{1}{N}) \to +\infty,\ a \to +\infty.$$

Отже, $f \in C([0,+\infty))$, $f(0) = 1$ та $f(a) \to +\infty$ при $a \to +\infty$. Тому за теоремою Коші про проміжне значення існує таке число $\sigma > 0$, що $f(\sigma) = 2$.
7. Параметризуємо рівняння:

$$\begin{cases} y = xu - \sqrt{1+u^2}, \\ dy = udx. \end{cases}$$

Тоді для u, x маємо $\left(x - \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right) du = 0$, звідки

$$\begin{cases} u = c,\ c \in \mathbb{R}, \\ y = cx - \sqrt{1+c^2} \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}, \\ y = \frac{u^2}{\sqrt{1+u^2}} - \sqrt{1+u^2} = -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}, \end{cases}$$

тобто $y = cx - \sqrt{1+c^2}$, $c \in \mathbb{R}$, або $y^2 + x^2 = 1,\ y < 0$.

З точок (x_1, y_1) та (x_2, y_2) можна провести дотичні до нижньої половини одиничного кола, причому точки дотику будуть належати третій та четвертій координатним чвертям відповідно. Неважко перевірити, що рівняння кожної прямої, яка дотикається до нижньої половини одиничного кола, має вигляд $y = cx - \sqrt{1+c^2}$ при деякому $c \in \mathbb{R}$. Тому графік шуканого розв'язку можна утворити з двох відрізків дотичних та дуги одиничного кола у спосіб, зображений на рис. 2.

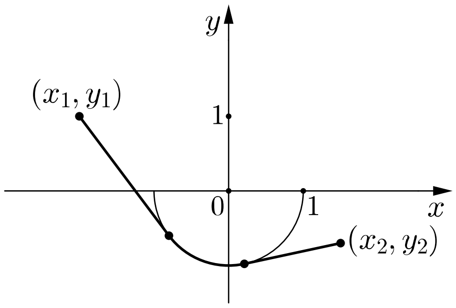

Рис. 2.