

# Олімпіада Київського національного університету імені Тараса Шевченка

В олімпіаді можуть брати участь учні випускних класів середніх шкіл, ліцеїв та гімназій України, які бажають вступити на механіко - математичний факультет. Олімпіада проходитиме в два тури. Перший — заочний, другий — очний.

Переможці першого туру запрошуються до участі в другому турі.

Усі учасники олімпіади повинні надіслати або передати особисто до деканату механіко - математичного факультету не пізніше 1 березня 2014 року розв'язки задач першого туру у тонкому зошиті, а також поштовий конверт із маркою та своєю зворотньою адресою. Анкета учасника наклеюється на обкладинку зошита.

## АНКЕТА УЧАСНИКА ОЛІМПІАДИ

Прізвище.....  
Ім'я.....  
По-батькові.....  
Область.....  
Місто, село.....  
Номер школи, клас.....  
Адреса школи, телефон.....  
Домашня поштова адреса, телефон.....  
.....

Зошити надсилаються за адресою:

01601 МСП, Київ, Володимирська, 64,  
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,  
журі олімпіади з математики, механіко-математичний факультет.

### Заочний тур олімпіади з математики механіко-математичного факультету в 2014 році

1. Нехай в опуклому чотирикутнику  $ABCD$  діагоналі перетинаються в точці  $O$ , а площі трикутників  $ABC, BCD, AOD$  дорівнюють відповідно 10, 7, 2. Знайти площу чотирикутника  $ABCD$ .
2. Знайти внутрішні кути  $\alpha, \beta, \gamma$  трикутника, для яких виконуються обидва співвідношення  $\sin(2\alpha - \beta) = \sin(2\beta - \gamma)$  та  $\cos(2\beta + \gamma) = \cos(2\gamma + \alpha)$ .
3. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{2x^2 - 3x - 1} + \sqrt{x^2 + 3x + 2} = \sqrt{3x^2 - 5x - 2} + \sqrt{2x^2 + x + 1}.$$

4. Знайти всі значення  $b$ , при кожному з яких система нерівностей

$$\begin{cases} 5x^2 - 4xy + 2y^2 \geq 3, \\ 7x^2 + 4xy + 2y^2 \leq \frac{2b - 1}{2b + 5} \end{cases}$$

має розв'язок.

5. Площина, паралельна основі  $ABC$  піраміди  $ABCD$ , відтинає піраміду  $A_1B_1C_1D$ . Об'єм піраміди  $ABCD$  дорівнює 324, об'єм піраміди  $A_1B_1C_1D$  дорівнює 96. Знайти об'єм піраміди  $AB_1C_1D$ .

6. Знайти суму перших 100 натуральних чисел, які при діленні на 7 дають в остачі 1 і діляться без остачі на 2.

7. Розв'язати рівняння

$$\log_5(16 \cdot 3^x - 15 \cdot 45^x) = \log_3(16 \cdot 5^x - 15 \cdot 75^x).$$

8. Знайти всі четвірки натуральних чисел  $(a, b, c, d)$ , для яких

$$\begin{cases} ab = cd, \\ b - a = 3, \\ d - c = 17. \end{cases}$$

9. Побудувати графік функції

$$y = \frac{\log_x(|x+1| - |x-1|)}{\log_x 2}.$$

10. Яким має бути  $x$ , щоб проміжок  $(1+x-x^2, x^2+x+2)$  містив єдине ціле число?

11. З'ясувати, чи існують на площині  $Oxy$  точки  $(x; y)$ , для яких виконується умова

$$x^4 + y^4 - 2x^2y^2 + 5x^2 + 5y^2 + 2xy + 6 = 0.$$

12. Знайти найменший додатний період функції

$$y(x) = |\cos 3x + \sin 3x| - |\cos 3x - \sin 3x|.$$