Конкурс “Від задачок до задач”

Розв’язання задач 11 — 15

Розділ ведуть Олександр Бедов та Ігор Гольдштейн[1]

11. Яких трикутників з цілими довжинами всіх сторін більше:
а) з периметром 2011 чи з периметром 2014?
б) з периметром 2012 чи з периметром 2015?

Відповідь: а) порівну; б) трикутників з периметром 2015 більше.

Розв’язок. а) Кожному трикутнику зі сторонами $a \le b \le c$ та периметром 2011 можна поставити у відповідність трикутник зі сторонами $a+1 \le b+1 \le c+1$ та периметром 2014, бо з нерівності $a+b>c$ випливає, що

$$(a+1)+(b+1) > a+b+1 > c+1.$$

Покажемо тепер, що кожному трикутнику зі сторонами $x \le y \le z$ та периметром 2014 можна поставити у відповідність трикутник зі сторонами $x-1 \le y-1 \le z-1$ та периметром 2011. Оскільки $x+y+z = 2014$, то числа $x+y$ та z мають однакову парність. Тому з нерівності $x+y>z$ випливає, що $x+y \ge z+2$, звідки

$$(x-1)+(y-1) \ge z > z-1.$$

Враховуючи, що $y-1 \le z-1$, дістаємо, що $x-1>0$, тобто $x-1 \le y-1 \le z-1$ — справді сторони деякого трикутника з периметром 2011.

Ми встановили взаємно-однозначну відповідність між трикутниками з периметрами 2011 та 2014, тому цих трикутників порівну.

б) Кожному трикутнику зі сторонами $a \le b \le c$ та периметром 2012 можна поставити у відповідність трикутник зі сторонами $a+1 \le b+1 \le c+1$ та периметром 2015. Але трикутник зі сторонами 1, 1007 та 1007 не відповідає жодному трикутнику з периметром 2012, отже трикутників з периметром 2015 більше.

12. Доведіть, що серед будь-яких 50 натуральних чисел від 1 до 100, жодні два з яких в сумі не дають 100, є повний квадрат.

Розв’язок. Розіб’ємо числа від 1 до 100 на 49 пар $(1,99),(2,98),\ldots,(49,51)$, сума чисел у кожній з яких дорівнює 100, а числа 50 та 100 залишимо без пари. Якщо у деякому наборі натуральних чисел від 1 до 100 жодне число не є квадратом та сума жодних двох чисел не дорівнює 100, то цей набір не містить жодного числа з пари $(36,64)$, містить щонайбільше по одному числу з решти 48 пар та, можливо, містить число 50. Отже, набір, для якого не виконується твердження задачі, може містити не більше за 49 чисел, що й завершує доведення.

13. Сторони трикутника — послідовні натуральні числа, а радіус вписаного кола дорівнює 4. Знайдіть радіус описаного кола.

Відповідь: $8\frac{1}{8}$.

[1] вчителі математики ліцею “Наукова зміна”

Розв'язок. Позначимо сторони трикутника $a = n-1$, $b = n$ та $c = n+1$. Півпериметр цього трикутника дорівнює $p = \frac{3}{2}n$. За формулою Герона знаходимо

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{3n}{2} \cdot \frac{n+2}{2} \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{n-2}{2}} = \frac{n\sqrt{3(n^2-4)}}{4}.$$

З іншого боку $S = pr = 6n$. Прирівнюючи отримані вирази, дістаємо $\sqrt{3(n^2-4)} = 24$, $n^2 - 4 = 192$, $n = 14$. Отже, $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$, $S = 84$ та $R = \frac{abc}{4S} = \frac{65}{8} = 8\frac{1}{8}$.

14. Мешканці квартир, що виходять на одну площадку, вирішили зробити нові номери квартир. Їм потрібні 7 цифр, виготовлення кожної з яких коштує стільки гривень, скільки значить цифра (нулі виготовляють безкоштовно). Мешканці зібрали по 3 гривні з кожної квартири, і їм цього вистачило. Які цифри було замовлено?

Відповідь: було замовлено цифри «6», «1», «0», «1», «1», «1», «2».

Розв'язок. Припустимо, що всі квартири мають однозначні номери. Тоді на площадку виходять 7 квартир та мешканці зібрали 21 грн. Проте найменша можлива вартість виготовлення 7 однозначних номерів це 1+2+3+4+5+6+7=28 (грн), тобто зібраних грошей не вистачить. Отже, деякі з номерів квартир складаються з двох або більшої кількості цифр.

За умовою на площадку виходять принаймні дві квартири. Також зрозуміло, що не всі номери квартир складаються з однакової кількості цифр, інакше потрібна кількість цифр не була б простою. Тому можливими є лише такі набори номерів:

$$7, 8, 9, 10, 11; \quad 9, 10, 11, 12; \quad 98, 99, 100; \quad 999, 1000.$$

Другий з цих наборів можна дістати, якщо замовити цифри «6», «1», «0», «1», «1», «1», «2», а потім перевернути цифру «6» та використати її замість цифри «9». На жоден з решти наборів зібраних грошей не вистачить навіть якщо замовити цифри «6» замість усіх цифр «9».

15. Доведіть, що при жодному цілому значенні q рівняння $x^2 + 7x - 14(q^2+1) = 0$ не має цілих коренів.

Розв'язок. I спосіб. Аби дане рівняння мало цілий корінь, його дискримінант

$$D = 49 + 56(q^2+1) = 7(8q^2+15)$$

має бути повним квадратом, а отже вираз $8q^2 + 15$ має ділитися на 7. Покажемо, що це не виконується при жодному цілому значенні q. Справді, $8q^2 + 15$ дає таку само остачу як $q^2 + 1$ при діленні на 7. Якщо q дає одну з остач 0,1,2,3,4,5,6 при діленні на 7, то $q^2 + 1$ дає одну з остач 1,2,5,3,3,5,2 відповідно. Таким чином, $q^2 + 1$ не ділиться на 7 при жодному цілому q.

II спосіб. Покажемо, що дискримінант рівняння

$$D = 49 + 56(q^2+1) = 56q^2 + 105$$

не може бути повним квадратом. Для цього зауважимо, що D дає таку само остачу як $2q^2 + 6$ при діленні на 9. Звідси якщо q ділиться на 3, то D ділиться на 3, але не ділиться на 9, а тому не є повним квадратом. Якщо ж q не ділиться на 3, то q^2 дає остачу 1 при діленні на 3, а D дає остачу 2 при діленні на 3 та не є повним квадратом.

СПИСОК ЧИТАЧІВ, ЩО НАДІСЛАЛИ ПРАВИЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ

Селіханович Даніїл *(9 клас, м. Одеса)* 11, 12, 13, 14, 15;
Чорний Михайло *(10 клас, м. Бровари Київської обл.)* 12, 13, 15.