Ігор МІТЕЛЬМАН,
заслужений вчитель України, викладач Рішельєвського ліцею, доцент Одеського обласного інституту вдосконалення вчителів, кандидат фіз.-мат. наук

Вадим РАДЧЕНКО,
заслужений вчитель України, професор Київського національного університету імені Тараса Шевченка, доктор фіз.-мат. наук

Дмитро СКОРОХОДОВ,
доцент Дніпропетровського національного університету імені Олеся Гончара, кандидат фіз.-мат. наук

Георгій ШЕВЧЕНКО,
доцент Київського національного університету імені Тараса Шевченка, кандидат фіз.-мат. наук

В’ячеслав ЯСІНСЬКИЙ,
заслужений вчитель України, доцент Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського

ЗАВДАННЯ IV ЕТАПУ LIII ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ УЧНІВСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ

Четвертий (заключний) етап LIII Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики проходив у м. Львові з 24 по 28 березня 2013 р. В олімпіаді взяли участь 167 учнів з усіх регіонів України, а також — поза конкурсом — команда з п’яти московських учнів 9-10 класів, запрошена Міністерством освіти і науки України.

Журі олімпіади очолював академік НАН України, лауреат Державної премії України, професор, доктор фізико-математичних наук, завідувач кафедри Київського національного університету імені Тараса Шевченка М. О. Перестюк. Міністерство освіти і науки України представляла заступник голови оргкомітету начальник відділу роботи з обдарованою молоддю та з проведення масових заходів Інституту інноваційних технологій і змісту освіти Л. В. Гунько.

Оргкомітет на чолі з директором Департаменту освіти, науки, сім’ї і молоді Львівської обласної державної адміністрації М. Г. Брегіним створив для проведення олімпіади, перебування школярів, керівників команд, членів журі всі необхідні умови.

Підтримку цьогорічній Всеукраїнській учнівській олімпіаді з математики надала корпорація «ROSHEN», яка в партнерстві з Інститутом інноваційних технологій і змісту освіти МОН України ініціювала довгострокову освітню програму «Лауреат ROSHEN» для відзначення найрозумніших школярів України. Український учень, який у складі нашої збірної команди здобуде найбільшу кількість балів на Міжнародній математичній олімпіаді, стане першим «Лауреатом ROSHEN» і, зокрема, отримає вагомий грант на навчання в одному з найпрестижніших університетів світу.

Учасники виконали завдання двох турів олімпіади, на кожному з яких на 4 години було запропоновано по 4 задачі з різних розділів шкільної програми та традиційних напрямів олімпіадної підготовки з математики. Бездоганне розв’язання кожної задачі, як і завжди, оцінювалося 7 балами.

Наведені нижче таблиці показують зведені результати учнів з виконання завдань олімпіади та дозволяють зробити висновки щодо рівня підготовки переможців I-III етапів олімпіади до заключного етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики.

8 клас (44 учасники)

Набрані бали	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8
7 балів	18	22	11	4	7	4	5	6
6 балів	1	0	0	0	3	0	0	0
5 балів	2	0	0	0	1	0	0	2
4 бали	0	0	0	0	2	1	0	0
3 бали	0	0	3	2	3	3	0	5
2 бали	0	0	3	10	0	17	12	28
1 бал	11	4	16	21	10	16	21	0
0 балів	12	18	11	7	18	3	6	3

9 клас (40 учасників)

Набрані бали	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8
7 балів	10	14	7	1	13	11	8	1
6 балів	2	2	0	0	3	5	1	0
5 балів	7	1	0	0	1	11	1	0
4 бали	4	0	0	1	0	1	2	0
3 бали	4	2	0	3	3	0	2	0
2 бали	7	3	1	10	3	0	16	2
1 бал	5	8	0	4	14	4	5	0
0 балів	1	10	32	21	3	8	5	37

10 клас (40 учасників)

Набрані бали	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8
7 балів	26	5	1	14	19	5	12	1
6 балів	3	0	0	1	6	3	0	0
5 балів	5	0	0	0	6	7	2	0
4 бали	4	0	0	1	4	5	1	0
3 бали	1	0	0	15	2	1	0	0
2 бали	0	3	0	4	1	2	2	1
1 бал	1	8	3	3	2	7	3	5
0 балів	0	24	36	2	0	10	20	33

11 клас (43 учасники)

Набрані бали	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8
7 балів	19	14	0	2	26	30	17	3
6 балів	3	0	0	0	5	5	7	0
5 балів	3	0	0	0	0	1	4	0
4 бали	4	0	0	1	5	0	1	0
3 бали	4	0	0	0	4	1	0	0
2 бали	7	2	14	2	2	0	1	0
1 бал	3	14	26	1	0	5	8	2
0 балів	0	13	3	37	1	1	5	38

Відповідно до спільного рішення оргкомітету та журі дипломами І-ІІІ ступенів нагороджено 84 учасники олімпіади.

Кількість дипломів переможців по регіонах

Регіони	Кількість учасників	Дипломи І ст.				Дипломи ІІ ст.				Дипломи ІІІ ст.				Разом
		класи				класи				класи				
		8	9	10	11	8	9	10	11	8	9	10	11	
АР Крим	**5**										2		1	**3**
Вінницька область	**6**						1			1	1			**3**
Волинська область	**8**								1	3				**4**
Дніпропетровська область	**8**			2		1		2					1	**6**
Донецька область	**8**							1				2	2	**5**
Житомирська область	**4**													**0**
Закарпатська область	**6**						1							**1**
Запорізька область	**7**							1			1	1		**3**
Івано-Франківська область	**6**					1				1		2		**4**
Київська область	**3**											1		**1**
Кіровоградська область	**4**													**0**
Луганська область	**4**													**0**
Львівська область	**8**							2			1		2	**5**
Миколаївська область	**3**									1			1	**2**
Одеська область	**4**										1			**1**
Полтавська область	**4**													**0**
Рівненська область	**4**									1				**1**

Сумська область	**5**									1		1		**2**
Тернопільська область	**4**									1			1	**2**
Харківська область	**15**	2	2	1		3	3		2	1			1	**15**
Херсонська область	**6**									1	1	3		**5**
Хмельницька область	**4**										1			**1**
Черкаська область	**7**					1			1		2			**4**
Чернігівська область	**4**													**0**
Чернівецька область	**4**													**0**
м. Київ	**14**	1			3	1	2		2	1			1	**11**
м. Севастополь	**4**							1						**1**
УФМЛ	**8**							1	1		1		2	**5**
Усього	**167**	**3**	**2**	**3**	**3**	**7**	**7**	**7**	**7**	**12**	**11**	**10**	**12**	**84**

ЗАДАЧІ ОЛІМПІАДИ ТА ЇХ РОЗВ'ЯЗАННЯ

8.1. Для невід'ємних чисел x і y має місце рівність $\left|\sqrt{y}-\sqrt{x}\right|=\sqrt{2xy+\frac{1}{2}}$. Яких значень може набувати вираз $\sqrt{x+y}-\sqrt{2xy}$?

Розв'язання. Для $x \geq 0$, $y \geq 0$ $\left|\sqrt{y}-\sqrt{x}\right|=\sqrt{2xy+\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x+y=2xy+2\sqrt{xy}+\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x+y=2\left(\sqrt{xy}+\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{x+y}=\sqrt{2xy}+\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Відповідь: $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Зауваження. Невід'ємні числа x і y, що задовольняють умову, насправді існують.

8.2. Чи можливо виписати в рядок усі натуральні числа від 1 до 24 так, щоб можна було вибрати щонайбільше чотири числа (не обов'язково розташованих поспіль), які стоять у цьому рядку в порядку зростання, та щонайбільше шість чисел (також не обов'язково розташованих поспіль), які стоять у цьому рядку в порядку спадання?

Розв'язання. Покажемо, що це можливо:

$$6, 5, 4, 3, 2, 1, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 18, 17, 16, 15, 14, 13, 24, 23, 22, 21, 20, 19.$$

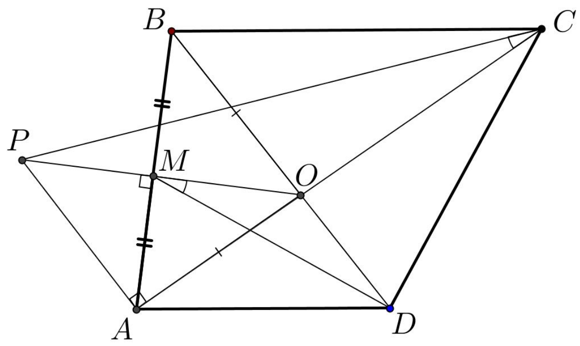
Відповідь: так, можна.

8.3. Відомо, що для натуральних k, m, n і q виконується рівність $2\left(k^2+km\right)+m^2+n^2=2013^q$, причому числа k і m — взаємно прості. Доведіть, що числа n і k^2+km не є взаємно простими.

Розв'язання. Маємо рівність $k^2+(k+m)^2+n^2=2013^q$. Оскільки $(k;m)=1$[1], то $(k;k+m)=1$. Припустимо, що n і k^2+km — взаємно прості числа. Тоді $(n;k)=1$ і $(n;k+m)=1$. Отже, серед чисел k, $k+m$ і n не більше за одне парне. І тому $k^2+(k+m)^2+n^2\equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$ чи $k^2+(k+m)^2+n^2\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$. Але ж $2013^q\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$, і одержуємо суперечність.

Зауваження. Для $k=10$, $m=33$, $n=8$ маємо: $10^2+(10+33)^2+8^2=2013$.

8.4. Нехай M — середина бічної сторони AB трапеції $ABCD$, O — точка перетину її діагоналей, причому $AO=BO$. На півпрямій OM позначили таку точку P, що $\angle PAC=90°$. Доведіть, що $\angle AMD=\angle APC$.



Розв'язання. Трикутники AOD і COB подібні, і тому $\frac{OC}{OA}=\frac{OB}{OD}$. Оскільки AM — висота, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника APO, то маємо: $OC\cdot OD=OA\cdot OB=OA^2=OM\cdot OP$. Отже, $\frac{OC}{OM}=\frac{OP}{OD}$. Півпряма OM — бісектриса кута AOB, і $\angle MOD=\angle COP$. Звідси випливає подібність трикутників OCP і OMD. Відтак, $\angle OCP=\angle OMD$, $90°-\angle OCP=90°-\angle OMD$, тобто $\angle APC=\angle AMD$.

8.5. Коротульки-малюки Незнайко, Знайко та Поспішайко одночасно вирушили в подорож із Квіткового міста до Зеленого міста, відстань між якими становить 1,7 км. Швидкості їхнього руху пішки дорівнюють 4 м/хв, 5 м/хв та 6 м/хв відповідно. У них є один моторолер, швидкість якого — 20 м/хв. Один з коротульок спочатку поїхав на моторолері, а двоє інших вийшли пішки. Проїхавши певну відстань, він залишив моторолер на дорозі й продовжив свій шлях пішки. Коротулька, що першим дістався до моторолера, поїхав на ньому і через деякий час також залишив його на дорозі, продовживши свій шлях пішки. Урешті-решт, третій із мандрівників, дійшовши до моторолера, прибув на ньому до Зеленого міста, причому — одночасно з двома іншими коротульками. Скільки часу кожен з малюків їхав на моторолері?

---

[1] Символом $(a;b)$ позначено найбільший спільний дільник натуральних чисел a і b.

Розв'язання. Нехай кожен з коротульок витратив на всю подорож t хв. Незнайко їхав на моторолері x хв, Знайко — y хв, а Поспішайко — z хв. Тоді маємо таку систему рівнянь:

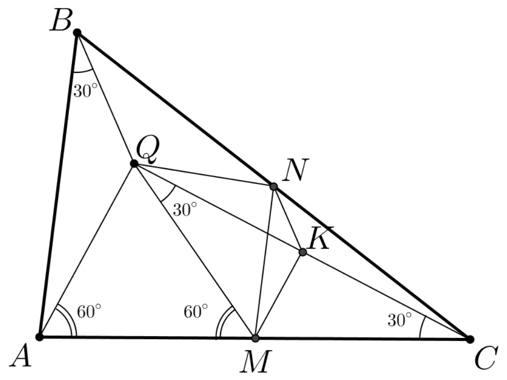
$$\begin{cases} 20x+4(t-x)=1700, \\ 20y+5(t-y)=1700, \\ 20z+6(t-z)=1700, \\ 20(x+y+z)=1700. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, знаходимо: $t=253$, $x=43$, $y=29$, $z=13$.

Відповідь: Незнайко, Знайко та Поспішайко їхали на моторолері 43 хв, 29 хв та 13 хв відповідно.

8.6. Усередині гострокутного трикутника ABC позначено таку точку Q, що $\angle QAC=60°$, $\angle QCA=\angle QBA=30°$. Нехай точки M і N — середини сторін AC і BC відповідно. Знайдіть величину кута QNM.

Розв'язання. Маємо, що $\angle AQC=90°$. Нехай K — середина відрізка QC. Тоді



$MN \parallel AB$, $NK \parallel BQ$. Отже, $\angle MNK=\angle ABQ=30°$. Звідси випливає, що $\angle MNK=\angle MQK$, адже $\angle MQK=30°$. Відтак, навколо чотирикутника $QNKM$ можна описати коло. Оскільки $MK \perp QC$, то $\angle QNM=\angle QKM=90°$.

Відповідь: $\angle QNM=90°$.

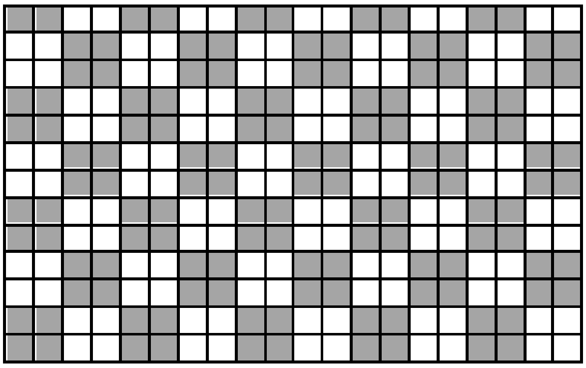
8.7. Знайдіть усі такі цілі n, для яких $n+3$ та n^2+3n+3 одночасно будуть кубами цілих чисел.

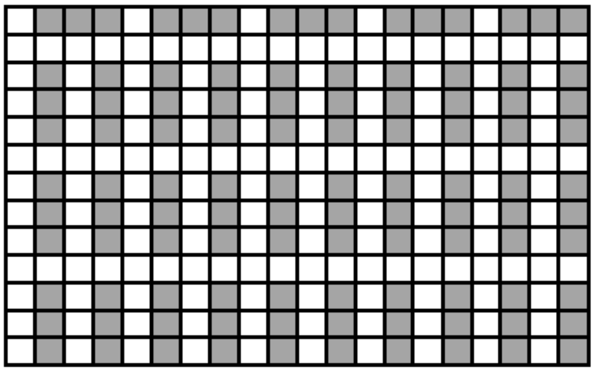
Розв'язання. Якщо числа $n+3$ і n^2+3n+3 будуть точними кубами, то кубом цілого числа має бути й число $(n+3)\left(n^2+3n+3\right)=(n+2)^3+1$. Звідси, з необхідністю, $n=-2$ або $n=-3$. Перевірка залишає нам лише $n=-2$.

Відповідь: $n=-2$.

8.8. Яку найбільшу кількість триклітинкових прямокутників (у будь-якій орієнтації) можна зафарбувати на клітчастій дошці розміру 20×13 так, щоб жодні два зафарбовані прямокутники не мали спільних точок?

Розв'язання 1. Виділимо на дошці розміру 20×13 30 квадратів 2×2 та 5





двоклітинкових прямокутників (далі — *виділені* фігурки) так, як зображено на малюнку ліворуч. Кожен триклітинковий прямокутник має спільні клітинки рівно з однією із 35 виділених фігурок. З іншого боку, відповідно до вимог умови задачі кожна із 35 виділених фігурок має спільні клітинки не більше, аніж з одним із триклітинкових прямокутників. Отже, триклітинкових прямокутників повинно бути не більше за 35. На малюнку праворуч зображено потрібне розташування 35 триклітинкових прямокутників.

Розв'язання 2. Наведемо інший спосіб доведення того факту, що триклітинкових прямокутників не може бути більше, ніж 35. Відмітимо *вузли* ґратки — вершини всіх клітинок дошки розміру 20×13. Одержимо 14 рядочків, у кожному з яких по 21 вузлу. Триклітинковий прямокутник у такому рядочку може задіяти тільки парну кількість вузлів (0, 2 або 4), і тому в кожному з 14 рядочків щонайменше по одному вузлу ми не задіюємо. Отже, задіяними буде не більше за 280 вузлів ґратки. Оскільки кожен триклітинковий прямокутник задіює рівно 8 вузлів, і жоден вузол не належить більше, аніж одному прямокутнику, то триклітинкових прямокутників — щонайбільше 35.

Відповідь: 35 триклітинкових прямокутників.

9.1. Для кожного дійсного невід'ємного значення параметра a визначте кількість дійсних розв'язків рівняння $\sqrt{ax}-x=\sqrt{a}-1$.

Розв'язання. Для $a=0$ єдиним розв'язком є $x=1$. Нехай тепер $a>0$. Тоді слід розглядати тільки $x\geq0$. Зауважимо, що $x=1$ є розв'язком для кожного $a>0$. Нехай $x\neq1$. Маємо:

$$\begin{cases}\sqrt{ax}-x=\sqrt{a}-1,\\ x\neq1;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{a}\sqrt{x}-x=\sqrt{a}-1,\\ x\neq1;\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sqrt{a}\left(\sqrt{x}-1\right)=x-1, \\ x\neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a}=\sqrt{x}+1, \\ x\neq 1. \end{cases}$$

Відповідь: якщо $a\in[0;\,1)\cup\{4\}$, то рівняння має єдиний розв’язок $x=1$; якщо $a\in[1;\,4)\cup(4;\,+\infty)$, то рівняння має два розв’язки $x=\left(\sqrt{a}-1\right)^2$ і $x=1$.

9.2. Знайдіть усі такі пари натуральних чисел m і n, для яких $\frac{(m+3n)^2}{m^2+n^2}$ є квадратом натурального числа.

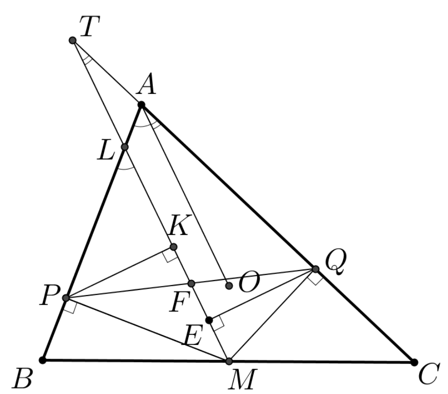
Розв’язання. Нехай m і n такі натуральні числа, що $\frac{(m+3n)^2}{m^2+n^2}=k^2$, де $k\in\mathbb{N}$, $k>1$ (ми врахували, що $(m+3n)^2>m^2+n^2$). Тоді

$$\left(k^2-1\right)m^2-6nm+\left(k^2-9\right)n^2=0.$$

Розглядаючи цю рівність як квадратне рівняння відносно m, для його дискримінанта одержуємо, що $4n^2\left(9-\left(k^2-1\right)\left(k^2-9\right)\right)$ є квадратом цілого числа. Для $k\geq 4$ $\left(k^2-1\right)\left(k^2-9\right)>9$. Для $k=2$ число $4n^2\left(9-\left(k^2-1\right)\left(k^2-9\right)\right)=96n^2$ не є точним квадратом. Залишається розглянути випадок $k=3$. Маємо, як неважко бачити, рівність $4m=3n$. Звідки $m=3l$, $n=4l$, де $l\in\mathbb{N}$.

Відповідь: $m=3l$, $n=4l$, де $l\in\mathbb{N}$ — довільне.

9.3. Нехай M — середина сторони BC гострокутного трикутника ABC, в якому $AB\neq AC$, O — центр його описаного кола. Проведемо з точки M перпендикуляри MP і MQ до сторін AB і AC відповідно. Доведіть, що пряма, яка проходить через середину відрізка PQ і точку M, є паралельною прямій AO.



Розв’язання. Без обмеження загальності вважаємо, що $AB<AC$. Нехай F — така точка відрізка PQ, що $FM\parallel AO$. Покажемо, що F — середина відрізка PQ. Проведемо з точок P і Q перпендикуляри PK і QE до прямої MF. Доведемо рівність $PK=QE$, з якої і випливатиме потрібний факт.

Позначимо через L і T точки перетину прямої MF з прямими AB і AC відповідно. Тоді

$$\angle BLM = \angle BAO = 90^\circ - \angle C, \ \angle CTM = \angle CAO = 90^\circ - \angle B.$$

З відповідних прямокутних трикутників маємо:

$$PM = \frac{1}{2} BC \sin \angle B,$$

$$PK = PM \sin \angle PML = PM \cos \angle BLM = PM \sin \angle C = \frac{1}{2} BC \sin \angle B \sin \angle C.$$

Аналогічно,

$$QM = \frac{1}{2} BC \sin \angle C,$$

$$QE = QM \sin \angle QMT = QM \cos \angle CTM = QM \sin \angle B = \frac{1}{2} BC \sin \angle C \sin \angle B.$$

Отже, $PK = QE$, що й треба було довести.

9.4. Нехай $m \geq 35$ — задане натуральне число. Відомо, що в суді племені Мумбо-Юмбо працює m суддів. Для прискореного розгляду справ Верховний шаман племені вирішив утворити суддівські трійки так, щоб кожні дві трійки мали хоча б одного спільного суддю. Яку найбільшу кількість суддівських трійок може утворити Верховний шаман?

Розв'язання 1. Візьмемо одного із суддів. Якщо утворити всі можливі трійки з m суддів так, щоб до складу кожної з них входив цей суддя, то всі утворені суддівські трійки задовольнятимуть умову задачі, причому їх буде рівно $C_{m-1}^2 = \frac{(m-1)(m-2)}{2}$.

Доведемо, що більшої кількості суддівських трійок отримати неможливо. Припустимо, що з дотриманням умови задачі утворилося N суддівських трійок, причому $N \geq C_{m-1}^2 + 1$. Нехай одна з таких трійок — назвемо її *основною* — складається із суддів A_0, A_1 і A_2. Через $M(A_0)$, $M(A_1)$, $M(A_2)$ позначимо множини всіх суддівських трійок (*за винятком основної*), до складу яких входять судді A_0, A_1, A_2 відповідно (дані множини можуть мати й спільні трійки). За припущенням, будь-яка з $N-1$ неосновних суддівських трійок повинна належати одній з цих множин. Тоді, за принципом Діріхле, хоча б одна з множин $M(A_0)$, $M(A_1)$, $M(A_2)$ містить не менше за $\frac{N-1}{3}$ суддівських трійок, причому $\frac{N-1}{3} \geq \frac{(m-1)(m-2)}{6}$. Нехай, для визначеності, це буде множина $M(A_0)$. У ній знайдеться менше, ніж $2(m-2)$ суддівських трійок, до складу яких одночасно із суддею A_0 входять або суддя A_1, або суддя A_2. Оскільки

$2(m-2)<\dfrac{(m-1)(m-2)}{6}$, то в множині $M(A_0)$ знайдеться така суддівська трійка $A_0A_3A_4$, що $A_3\not\in\{A_1, A_2\}$ і $A_4\not\in\{A_1, A_2\}$. Аналогічно, у множині $M(A_0)$ існує менше, ніж $4(m-2)$ трійок, до складу яких одночасно із суддею A_0 входить принаймні один із суддів A_i, $1\le i\le 4$. Оскільки $4(m-2)<\dfrac{(m-1)(m-2)}{6}$, то в множині $M(A_0)$ знайдеться така суддівська трійка $A_0A_5A_6$, що $A_5\not\in\{A_i\,|\,1\le i\le 4\}$ і $A_6\not\in\{A_i\,|\,1\le i\le 4\}$. Урешті-решт покажемо, що в множині $M(A_0)$ знайдеться суддівська трійка $A_0A_7A_8$, у якій $A_7\not\in\{A_i\,|\,1\le i\le 6\}$, $A_8\not\in\{A_i\,|\,1\le i\le 6\}$. Для цього нам знадобиться більш точна оцінка кількості неосновних трійок, до складу яких одночасно із суддею A_0 входить хоча б один із суддів A_i, $1\le i\le 6$. У добутку $6(m-2)$ кожна із C_6^2 суддівських трійок вигляду $A_0A_iA_j$, $1\le i\ne j\le 6$, враховується двічі, до того ж, основну трійку $A_0A_1A_2$ слід узагалі виключити з розгляду. Отже, у множині $M(A_0)$ існує не більше, ніж $6(m-2)-C_6^2-1=6m-28$ потрібних нам трійок. Оскільки $6m-28<\dfrac{(m-1)(m-2)}{6}$ для $m\ge 35$, то й маємо потрібний результат.

Далі, за умовою задачі будь-яка із N утворених суддівських трійок має хоча б одного спільного суддю з кожною з чотирьох суддівських трійок $A_0A_1A_2$, $A_0A_3A_4$, $A_0A_5A_6$ і $A_0A_7A_8$. Зрозуміло, що одним із спільних членів таких трійок мусить бути суддя A_0, бо якщо він не входить до деякої суддівської трійки, то до її складу повинні входити хоча б по одному судді з кожної з множин $\{A_1, A_2\}$, $\{A_3, A_4\}$, $\{A_5, A_6\}$, $\{A_7, A_8\}$, що неможливо. Отже, усі утворені суддівські трійки мають спільного суддю A_0, а це означає, що $N\le C_{m-1}^2$. Дістали суперечність.

Відповідь: $C_{m-1}^2=\dfrac{(m-1)(m-2)}{2}$.

Розв'язання 2 (учасник олімпіади Смірнов Денис, м. Харків). Назвемо *рейтингом* судді кількість трійок, до яких він входить. Нехай A — суддя з найбільшим рейтингом (якщо таких суддів декілька, то візьмемо будь-якого з них). Якщо суддя A входить до всіх трійок, то маємо очевидну відповідь $C_{m-1}^2=\dfrac{(m-1)(m-2)}{2}$. Припустимо тепер, що існує трійка, до якої суддя A не входить. Нехай це трійка BCD. Тоді, як неважко помітити, найбільша можлива кількість суддівських трійок, які містять суддю A, становить $3(m-4)+3=3(m-3)$. Оскільки суддя A має найбільший рейтинг, то рейтинги кожного із суддів B, C, D не перевищують $3(m-3)$. До кожної суддівської трійки входить хоча б один із суддів B, C, D, і тому загальна кількість суддівських трійок не більше за $9(m-3)$. Для $m \geq 18$ виконується нерівність $\frac{(m-1)(m-2)}{2} > 9(m-3)$.

Зауваження. Ми бачимо, що такий спосіб міркувань покращує результат задачі: її твердження доведено для $m \geq 18$.

9.5. Розв’яжіть рівняння $\left[x\{x[x]\}\right]=x^2$ (тут $[a]$ — ціла частина числа a, тобто найбільше ціле число, яке не перевищує a; $\{a\}=a-[a]$ — дробова частина числа a).

Розв’язання. Помітимо, що $x=0$ є коренем рівняння. Далі вважаємо, що $x \neq 0$. Запишемо наше рівняння у вигляді $\left[x\left\{x\left(x-\{x\}\right)\right\}\right]=x^2$, $\left[x\left\{x^2-x\{x\}\right\}\right]=x^2$.

Оскільки x^2 — ціле число, то маємо: $\left[x\left\{-x\{x\}\right\}\right]=x^2$. Звідки

$$0 < x^2 \leq x\left\{-x\{x\}\right\} < x^2+1. \ (*)$$

Позаяк ми розглядаємо $x \neq 0$, то, зрозуміло, $\left\{-x\{x\}\right\}>0$ (якщо $\left\{-x\{x\}\right\}=0$, то $x^2=\left[x\left\{-x\{x\}\right\}\right]=0$, $x=0$). З нерівностей (*) маємо, що $x>0$. Далі, $0<x<\left\{-x\{x\}\right\}<1$, і тому $x=\{x\}$. Але тоді $\left\{-x\{x\}\right\}=\left\{-x^2\right\}=0$, адже x^2 — ціле число.

Відповідь: $x=0$.

9.6. Нехай a, b і c — дійсні числа з проміжку $(0;1]$. Доведіть, що має місце нерівність $a+b+c+|a-b|+|b-c|+|c-a| \leq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

Розв’язання. Не порушуючи загальності, будемо вважати, що $0<a \leq b \leq c \leq 1$. Тоді маємо для доведення нерівність

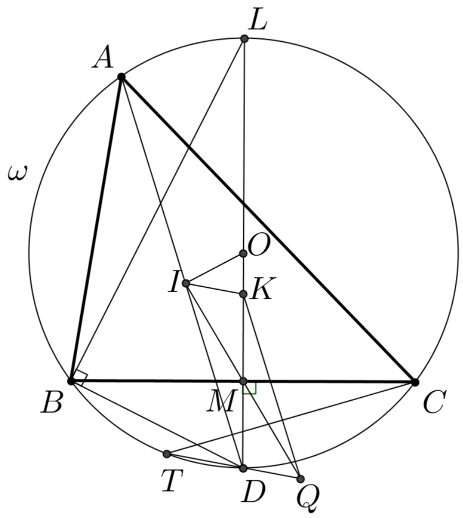
$$\left(\frac{1}{a}+a\right)+\left(\frac{1}{b}-b\right)+\left(\frac{1}{c}-3c\right) \geq 0.$$

Для $a>0$ $\frac{1}{a}+a\geq 2$. Якщо $0<b\leq 1$, то $\frac{1}{b}-b\geq 0$. Для $0<c\leq 1$ неважко одержати нерівність $\frac{1}{c}-3c\geq -2$. Додавши ці три нерівності, одержимо потрібну нерівність.

9.7. Див. задачу 8.8.

9.8. Навколо гострокутного трикутника ABC, у якому $AB<BC<AC$, описано коло ω з центром O. Позначимо через I центр вписаного кола даного трикутника, а через M — середину сторони BC. Нехай точка Q симетрична точці I відносно M, півпряма OM перетинає коло ω в точці D, а півпряма QD вдруге перетинає коло ω в точці T. Доведіть, що $\angle ACT=\angle DOI$.

Розв'язання. Нехай DL — діаметр кола ω, точка K симетрична D відносно прямої BC. Чотирикутник $QDIK$ є паралелограмом. У прямокутному трикутнику DBL $DB^2=DM\cdot DL$. Як відомо, $DB=DI$ (лема про «тризуб»).



Отже, $DI^2=DM\cdot DL=2DM\cdot DO=DK\cdot DO$, $\frac{DI}{DK}=\frac{DO}{DI}$. Тому трикутники DOI і DIK подібні, і $\angle IOD=\angle KID$.

Відтак, одержуємо:

$$\angle DOI=\angle KID=\angle KIQ+\angle QID=\angle DQI+\angle QID=180^\circ-\angle IDQ=$$
$$=\angle IDT=\angle ADT=\angle ACT.$$

10.1. Для дійсних чисел x, y, z і t виконуються рівності

$$\{x+y+z\}=\{y+z+t\}=\{z+t+x\}=\{t+x+y\}=\frac{1}{4}.$$

Знайдіть усі можливі значення виразу $\{x+y+z+t\}$. (Тут $\{a\}=a-[a]$, а $[a]$ — ціла частина числа a, тобто найбільше ціле число, яке не перевищує a.)

Розв'язання. Із умови задачі випливає, що

$$x+y+z=[x+y+z]+\frac{1}{4},\ y+z+t=[y+z+t]+\frac{1}{4},$$

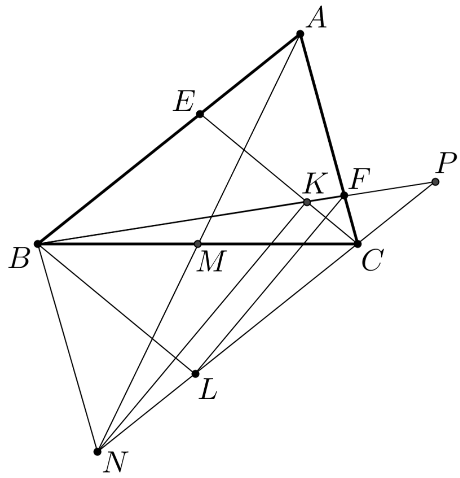
$$z+t+x=[z+t+x]+\frac{1}{4},\ t+x+y=[t+x+y]+\frac{1}{4}.$$

Отже, $3(x+y+z+t)=[x+y+z]+[y+z+t]+[z+t+x]+[t+x+y]+1$. Це означає, що $3(x+y+z+t)$ — ціле число, тобто дробова частина числа $x+y+z+t$ дорівнює 0, $\frac{1}{3}$ або $\frac{2}{3}$.

Усі ці значення досягаються. Для того, щоб у цьому переконатись, розглянемо випадки $x=y=z=t=\frac{3}{4}$, $x=y=z=t=\frac{1}{12}$, $x=y=z=t=\frac{5}{12}$.

Відповідь: $0;\ \frac{1}{3};\ \frac{2}{3}$.

10.2. Нехай M — середина сторони BC трикутника ABC. На його сторонах AB і AC позначили відмінні від вершин довільні точки E і F відповідно. Нехай K — точка перетину прямих BF і CE, L — така точка, що $CL \parallel AB$ і $BL \parallel CE$, а N — точка перетину прямих AM і CL. Доведіть, що $KN \parallel FL$.



Розв'язання 1. Чотирикутник $BECL$ — паралелограм. Позаяк $AB \parallel CN$, а точка M — середина відрізка BC, то $ABNC$ також є паралелограмом, і тому $AE=NL$. Нехай P — точка перетину прямих BF і CN. Оскільки $FC \parallel BN$, то трикутники PBN і PFC подібні. Звідки $\frac{PF}{PB}=\frac{PC}{PN}$, тобто $PF=\frac{PB\cdot PC}{PN}$. Оскільки $PC \parallel BE$, то подібними будуть трикутники PCK і BEK. Маємо: $\frac{PK}{BK}=\frac{PC}{BE}$, $PK=\frac{BK\cdot PC}{BE}$. Отже, $\frac{PF}{PK}=\frac{PB\cdot BE}{BK\cdot PN}$. Оскільки трикутники BLP і KEB подібні, то $\frac{PL}{PB}=\frac{BE}{BK}$, і $\frac{PL}{PN}=\frac{PB\cdot BE}{BK\cdot PN}$. Тепер ми маємо пропорцію $\dfrac{PF}{PK}=\dfrac{PL}{PN}$, з якої, у свою чергу, випливає подібність трикутників PFL і PKN. Відтак, $\angle PFL=\angle PKN$, і тому $KN \parallel FL$, що й треба було довести.

Розв'язання 2. Нехай $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE}=e\cdot\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF}=f\cdot\overrightarrow{AC}$, $0<e<1$, $0<f<1$. Тоді

$$\overrightarrow{FL}=\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BL}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}=\left(1-e\right)\cdot\vec{b}+\left(1-f\right)\cdot\vec{c}.$$

Оскільки точки B, K і F колінеарні, то для деякого дійсного x маємо: $\overrightarrow{AK}=x\cdot\overrightarrow{AB}+\left(1-x\right)\cdot\overrightarrow{AF}$. Аналогічно, для колінеарних точок C, K і E $\overrightarrow{AK}=y\cdot\overrightarrow{AE}+\left(1-y\right)\cdot\overrightarrow{AC}$.

Тепер одержуємо рівність $\left(x-ey\right)\vec{b}=\left(1-y-\left(1-x\right)f\right)\cdot\vec{c}$. Оскільки вектори $\vec{b}$ і $\vec{c}$ неколінеарні, то $x-ey=1-y-\left(1-x\right)f=0$. Звідси $x=\dfrac{e-ef}{1-ef}$, $y=\dfrac{1-f}{1-ef}$, і тому $\overrightarrow{AK}=\dfrac{e-ef}{1-ef}\cdot\vec{b}+\dfrac{f-ef}{1-ef}\cdot\vec{c}$.

Далі,

$$\overrightarrow{KN}=\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{AC}=\frac{1-e}{1-ef}\cdot\vec{b}+\frac{1-f}{1-ef}\cdot\vec{c}=\frac{1}{1-ef}\cdot\overrightarrow{FL}.$$

Отже, $KN \parallel FL$.

Розв'язання 3. Виконаємо паралельне проектування так, щоб кут BAC спроектувався в прямий кут, а відрізки AB і AC — у рівні відрізки (у площині проекцій будемо використовувати позначення з умови задачі). Тепер задачу легко розв'язати методом координат, вважаючи точку A початком координат і напрямивши координатні осі вздовж променів AB і AC. Для точок $B\left(1;0\right)$, $C\left(0;1\right)$, $E\left(e;0\right)$, $F\left(0;f\right)$, $0<e<1$, $0<f<1$, неважко отримати, що $N\left(1;1\right)$, $L\left(1-e;1\right)$, $K\left(\dfrac{\left(f-1\right)e}{fe-1};\dfrac{\left(e-1\right)f}{fe-1}\right)$. Звідси знаходимо, що прямі KN і FL мають однаковий кутовий коефіцієнт $\dfrac{1-f}{1-e}$.

Розв'язання 4. Застосуємо теорему Паппа — класичну теорему проективної геометрії — до колінеарних трійок (F, K, B) і (N, L, C). Спільні точки (*власні* чи *невласні*) прямих KN і FL, FC і BN, KC і BL мають лежати на одній прямій (*власній* чи *невласній*). Оскільки $FC \parallel BN$ і $KC \parallel BL$, то спільна точка прямих FC і BN, як і спільна точка прямих KC і BL, є невласною — нескінченно віддаленою. Отже, спільна точка прямих KN і FL також є нескінченно віддаленою, тобто $KN \parallel FL$.

10.3. Відомо, що для натуральних чисел a, b, c, d і n виконуються нерівності $a+c<n$ і $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}<1$. Доведіть, що $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}<1-\frac{1}{n^3}$.

Розв'язання. Оскільки $n>a+c\geq 2$, то $n\geq 3$. До того ж, $a<b$ і $c<d$, адже $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}<1$.

Розглянемо такі випадки.

а) Нехай $b\geq n$ і $d\geq n$, тоді $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\leq\frac{a}{n}+\frac{c}{n}=\frac{a+c}{n}\leq\frac{n-1}{n}=1-\frac{1}{n}<1-\frac{1}{n^3}$.

б) Нехай $b\leq n$ і $d\leq n$, тоді з нерівності $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}<1$ випливає, що $ad+bc<bd$, тобто $ad+bc+1\leq bd$. Звідси $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\leq 1-\frac{1}{bd}\leq 1-\frac{1}{n^2}<1-\frac{1}{n^3}$.

в) Нехай $b<n<d$. Якщо $d\leq n^2$, то $bd<n^3$, і тоді $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\leq 1-\frac{1}{bd}<1-\frac{1}{n^3}$. Якщо $d>n^2$, то $\frac{c}{d}\leq\frac{n-2}{n^2}=\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}$, оскільки $c<n-a\leq n-1$, тобто $c\leq n-2$. Припустимо, що $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\geq 1-\frac{1}{n^3}$. Тоді $1-\frac{a}{b}\leq\frac{c}{d}+\frac{1}{n^3}\leq\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}<\frac{1}{n}$. Звідси випливає, що $b>n(b-a)\geq n$ (тут ми врахували, що $a<b$), що суперечить нерівності $b<n<d$.

г) Нехай $d<n<b$. Якщо $b\leq n^2$, то $bd<n^3$, і тоді $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\leq 1-\frac{1}{bd}<1-\frac{1}{n^3}$. Якщо $b>n^2$, то $\frac{a}{b}\leq\frac{n-2}{n^2}=\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}$, оскільки $a<n-c\leq n-1$, тобто $a\leq n-2$. Припустимо, що $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\geq 1-\frac{1}{n^3}$. Тоді $1-\frac{c}{d}\leq\frac{a}{b}+\frac{1}{n^3}\leq\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}<\frac{1}{n}$. Позаяк $c<d$, маємо: $d>n(d-c)\geq n$. Одержали суперечність з нерівністю $d<n<b$.

Отже, нерівність $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}<1-\frac{1}{n^3}$ виконується в усіх випадках, що й треба було довести.

10.4. На столі лежать 100 карток, які пронумеровані натуральними числами від 1 до 100. Андрійко й Миколка вибрали собі однакову кількість карток так, що якщо картка з номером n є в Андрійка, то в Миколки є картка з номером $2n+2$. Яка максимальна кількість карток могла бути в обох хлопчиків?

Розв'язання. Спочатку доведемо, що кількість карток у обох хлопчиків не перевищує 66, тобто кількість карток у кожного не перевищує 33.
Оскільки $2n+2\le 100$, то $2n\le 98$, тобто $n\le 49$. Це означає, що номери карток Андрійка належать множині $\{1, 2, 3, \ldots, 49\}$. Розіб'ємо цю множину на такі групи підмножин: $\{1, 4\}$, $\{3, 8\}$, $\{5, 12\}$, …, $\{23, 48\}$ (12 підмножин); $\{2, 6\}$, $\{10, 22\}$, $\{14, 30\}$, $\{18, 38\}$ (4 підмножини); $\{25\}$, $\{27\}$, $\{29\}$, …, $\{49\}$ (13 підмножин); $\{26\}$, $\{34\}$, $\{42\}$, $\{46\}$ (4 підмножини). Усього $12+4+13+4=33$ підмножини. Будь-які дві з цих підмножин не мають спільних елементів. Якщо в Андрійка буде щонайменше 34 картки, то за принципом Діріхле номери якихось двох з них будуть елементами однієї із вказаних вище двоелементних підмножин. Але оскільки кожна така двоелементна підмножина має вигляд $\{n, 2n+2\}$, то одержуємо суперечність з умовою задачі.
Приклад для множини A номерів 33 карток Андрійка може бути таким:

$$A=\{1, 3, 5, \ldots, 23, 2, 10, 14, 18, 25, 27, 29, \ldots, 49, 26, 34, 42, 46\}.$$

Тоді номери карток Миколки утворюватимуть множину $M=\{2n+2 \mid n\in A\}$.
Відповідь: 66 карток.

10.5. Знайдіть усі такі дійсні значення x, для яких виконується нерівність

$$\min(\sin x, \cos x) < \min(1-\sin x, 1-\cos x).$$

(Для $a\le b$ $\min(a, b)=\min(b, a)=a$.)
Розв'язання.
Умова задачі рівносильна сукупності систем нерівностей

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x<1-\sin x,\\ \sin x<1-\cos x;\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x<1-\sin x,\\ \cos x<1-\cos x.\end{cases}\end{array}\right.$$

Маємо:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin x<\dfrac{1}{2},\\ \cos x<\dfrac{1}{2};\end{array}\right.\\ \sin x+\cos x<1.\end{cases}$$

Відповідь: $\left(-\dfrac{3\pi}{2}+2\pi n;\ 2\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$.

10.6. Знайдіть усі такі пари простих чисел p і q, які задовольняють рівність $3p^q - 2q^{p-1} = 19$.

Розв'язання. Зрозуміло, що слід розглядати тільки $p \ge 3$. Якщо $p = q$, то маємо рівність $\left(3p^{p-2} - 2p^{p-3}\right)p^2 = 19$, яка для простого $p \ge 3$ є неможливою.

Розглядаємо далі $p \ne q$. За Малою теоремою Ферма $q^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod p$, $p^{q-1} - 1 \equiv 0 \pmod q$. Подаємо задану рівність у вигляді $3p^q - 2\left(q^{p-1} - 1\right) = 21$, і оскільки ліва частина цієї рівності ділиться без остачі на p, робимо висновок, що $p = 3$ або $p = 7$. Далі, записавши вихідну рівність у вигляді $3p\left(p^{q-1} - 1\right) - 2q^{p-1} = 19 - 3p$, одержуємо, що $19 - 3p$ ділиться без остачі на q.

Подальшим нескладним перебором дістанемо відповідь.

Відповідь: $p = 3$, $q = 2$; $p = 7$, $q = 2$.

10.7. Чи можна в просторі відмітити 24 точки, жодні три з яких не лежать на одній прямій, та провести рівно 2013 різних площин так, щоб кожна містила не менше трьох відмічених точок, і будь-яка трійка відмічених точок належала хоча б одній з цих площин?

Розв'язання. Припустимо, що це можливо. Позначимо через π_1, π_2, … , π_{2013} ці площини, а через n_1, n_2, … , n_{2013} — кількості відмічених точок, що, відповідно, їм належать. Тоді, за умовою задачі, $n_i \ge 3$ для кожного i, $1 \le i \le 2013$. Зрозуміло, що

$$C_{n_1}^3 + C_{n_2}^3 + \ldots + C_{n_{2013}}^3 = C_{24}^3 = 2024.$$

До того ж, $n_i \le 5$ для всіх i, $1 \le i \le 2013$, бо якщо серед n_1, n_2, … , n_{2013} знайдеться хоча б одне число, яке більше 5, то матимемо:

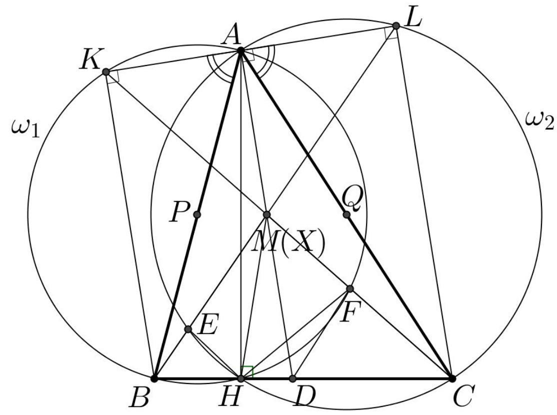
$$2024 = C_{n_1}^3 + C_{n_2}^3 + \ldots + C_{n_{2013}}^3 \ge \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{2012 \text{ доданків}} + C_6^3 = 2012 + 20 = 2032,$$

що є хибним.

Нехай серед чисел n_1, n_2, … , n_{2013} рівно a чисел дорівнюють 3, рівно b чисел дорівнюють 4 і рівно c чисел дорівнюють 5. Тоді $a + b + c = 2013$, і $C_3^3 \cdot a + C_4^3 \cdot b + C_5^3 \cdot c = 2024$. Звідки одержуємо рівність $3b + 9c = 11$, яка не може виконуватись для цілих невід'ємних b і c. Одержана суперечність завершує розв'язання.

Відповідь: ні, неможливо.

10.8. Нехай точка M — середина бісектриси AD гострокутного трикутника ABC. Коло з діаметром AC перетинає відрізок BM у точці E, а коло з діаметром AB перетинає відрізок CM у точці F. Доведіть, що точки B, E, F і C лежать на одному колі.

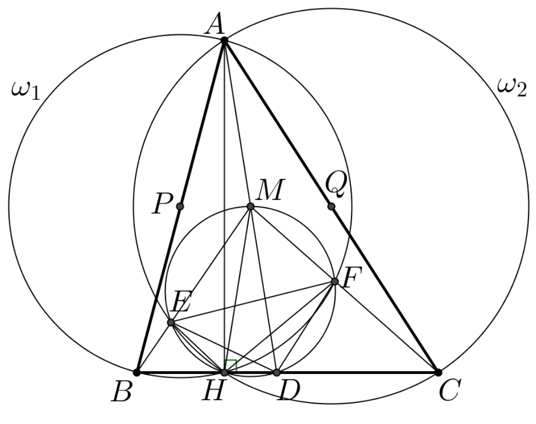


Розв'язання. Якщо $AB = AC$, то твердження задачі є очевидним. Без обмеження загальності вважатимемо, що $AB < AC$. Нехай AH — висота трикутника ABC. Тоді точка H лежить між точками B і D. Відрізок AH — спільна хорда кіл ω_1 та ω_2, побудованих як на діаметрах на відрізках AB і AC відповідно. Через вершину A проведемо пряму, перпендикулярну до AD, яка перетинає кола ω_1 і ω_2 у відмінних від A точках K і L відповідно.

Доведемо, що пряма BL проходить через точку M. Позначимо через X точку перетину прямих BL і AD. Оскільки $KB \parallel AD \parallel LC$, то отримуємо такі пропорції:

$$\frac{AX}{KB} = \frac{LA}{LK},\ \frac{DX}{CL} = \frac{BD}{BC},\ \frac{BD}{BC} = \frac{KA}{KL}.$$

Отже, $AX = \dfrac{KB \cdot LA}{LK}$, $DX = \dfrac{CL \cdot KA}{KL}$. Далі, $\angle KAB = \angle LAC$, і трикутники AKB і ALC подібні. Звідси $\dfrac{KA}{LA} = \dfrac{KB}{LC}$, $LC \cdot KA = KB \cdot AL$. Відтак, $AX = DX$, тобто точка X збігається з точкою M. Аналогічно доводиться, що пряма CK також проходить через точку M.



Маємо: $\angle DME = \angle LMA = \angle CLE = 180° - \angle DHE$ (ми використали, що чотирикутник $ELCH$ вписаний у коло ω_2). Це означає, що точки E, M, D і H лежать на одному колі. Чотирикутник $KBHF$ вписаний у коло ω_1, і тому

$\angle DMF = \angle KMA = \angle MKB = 180° - \angle BHF = \angle DHF$, звідки випливає, що точки M, H, D і F лежать на одному колі.
Ми довели, що точки M, E, H, D і F лежать на одному колі. У прямокутному трикутнику HAD відрізок HM — медіана, проведена до гіпотенузи. Тому $MD = MH$. Відтак, $\angle MDH = \angle MHD = \angle MED = \angle MFH$. Розглянемо трикутники MDE і MBD, в яких кут при вершині M спільний, а $\angle MED = \angle MDB$. Отже, $180° - \angle CFE = \angle MFE = \angle MDE = \angle MBD$. З цього й одержуємо, що чотирикутник $BEFC$ вписаний.
Зауваження. Для гострокутного трикутника ABC легко довести, що середина бісектриси AD лежить усередині обох кіл ω_1 і ω_2. Насправді, побудуємо квадрат $ABTS$ так, щоб точки T, C і S лежали по один бік від прямої AB. Нехай G — основа перпендикуляра, проведеного з точки B до прямої AD. Тоді $AG = AB\cos\angle BAD > AB\cos 45° = \dfrac{AT}{2} > \dfrac{AD}{2} = AM$, і тому кут AMB тупий. Аналогічно доводиться, що кут AMC також тупий.

11.1. Для кожного дійсного значення параметра a визначте кількість дійсних розв'язків рівняння $\sqrt{ax + \sqrt[3]{x}} = x^{2013}$.
Розв'язання. Зрозуміло, що $x \ge 0$. Для будь-якого $a \in \mathbb{R}$ $x = 0$ є розв'язком даного рівняння. Будемо далі розглядати $x > 0$ і запишемо наше рівняння в рівносильному вигляді $a = x^{4025} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$.

На проміжку $(0; +\infty)$ функція $f(x) = x^{4025} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ є неперервною та строго зростаючою. До того ж, $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = -\infty$ і $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Отже, функція f на проміжку $(0; +\infty)$ набуває кожного дійсного значення, причому — рівно один раз.
Відповідь: рівняння має два розв'язки для будь-якого дійсного значення a.

11.2. Див. задачу 10.2.

11.3. Знайдіть усі функції $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, які задовольняють такі дві умови:
а) $f(x) \ne f(y)$ для будь-яких цілих x і y таких, що $x \ne y$;
б) $f(f(x)y + x) = f(x)f(y) + f(x)$ для всіх $x \in \mathbb{Z}$ і $y \in \mathbb{Z}$.
Розв'язання. Візьмемо $x = y = 0$. Знаходимо, що $f(0) = 0$. Нехай $x_0 \ne 0$ і позначимо $a = f(x_0)$, $a \ne 0$. Підставимо до вихідного співвідношення $x = x_0$. Тоді

для всіх $y \in \mathbb{Z}$ маємо $f(ay + x_0) = af(y) + a$. Тепер підставимо до вихідного співвідношення замість x вираз $ax + x_0$. Одержуємо:

$$f\left(f(ax + x_0)y + ax + x_0\right) = f(ax + x_0)f(y) + f(ax + x_0),$$

$$f\left((af(x) + a)y + ax + x_0\right) = (af(x) + a)f(y) + af(x) + a,$$

$$f\left(af(x)y + ay + ax + x_0\right) = af(x)f(y) + af(y) + af(x) + a.$$

Оскільки до правої частини x і y входять симетрично, то $f\left(af(x)y + ay + ax + x_0\right) = f\left(af(y)x + ax + ay + x_0\right)$ для всіх $x \in \mathbb{Z}$ і $y \in \mathbb{Z}$.

З урахуванням умови задачі, $af(x)y + ay + ax + x_0 = af(y)x + ax + ay + x_0$, тобто для всіх $x \in \mathbb{Z}$ і $y \in \mathbb{Z}$ $f(x)y = f(y)x$. Зафіксуємо довільне $y = y_0$, $y_0 \neq 0$, і позначимо $k = \dfrac{f(y_0)}{y_0}$, $k \neq 0$. Тоді $f(x) = kx$, $k \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Оскільки $f(x)$ є цілим числом для кожного цілого x, то легко встановити, що $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Залишається перевірити, що всі функції вигляду $f(x) = kx$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, задовольняють умову задачі.

Відповідь: $f(x) = kx$, $x \in \mathbb{Z}$, де $k \neq 0$ — довільне ціле число.

11.4. Нехай задано натуральне число $n \geq 2$ і додатні дійсні числа $l_1, l_2, \ldots, l_n$. Труби з довжинами $l_1, l_2, \ldots, l_n$ лежать у вказаному порядку в ряд. Зварювальник може зварити разом будь-які дві сусідні труби довжинами x та y, утворивши трубу довжиною $x + y$, і за це він бере плату $(x + y)^3$. (Наприклад, якщо зварити другу й третю труби, а потім — отриману трубу з першою, то плати за ці зварювання дорівнюватимуть $(l_2 + l_3)^3$ та $(l_1 + l_2 + l_3)^3$ відповідно.) Порядок, у якому лежать труби, змінювати не можна. Доведіть, що якими б не були початкові довжини труб, існує така послідовність зварювань, що всі труби будуть зварені разом і сумарна плата за це буде меншою, ніж $2(l_1 + l_2 + \cdots + l_n)^3$.

Розв'язання 1. Оберемо наступну стратегію. На кожному кроці проситимемо зварювальника зварити дві сусідні труби, сумарна довжина яких найменша серед усіх пар сусідніх труб. Якщо є декілька таких пар, можна обрати будь-яку з них. Доведемо індукцією за n, що сумарна плата S при зварюванні за такою стратегією менша, ніж $2l^3$, де $l = l_1 + l_2 + \ldots + l_n$.

База індукції очевидна: для $n = 2$ плата $(l_1 + l_2)^3$ менша за $2(l_1 + l_2)^3$.

Нехай $n > 2$. Розглянемо шматки A і B, які були зварені на останньому кроці. Нехай їхні довжини дорівнюють a і b відповідно, $l = a + b$. Без обмеження загальності вважаємо, що A лежить ліворуч від B, $a \le b$. Розглянемо процеси зварювання цих шматків окремо один від одного. Оскільки на кожному кроці сумарна довжина зварюваних труб найменша серед усіх пар сусідніх труб, то вона є найменшою й серед сусідніх пар труб, що входять до цього шматка. Тобто шматки A і B теж утворюються за вказаною вище стратегією, отже, сумарні плати за їхнє створення менші за $2a^3$ та $2b^3$ відповідно.
Розглянемо два випадки.

Перший випадок: $a \ge \frac{l}{4}$. Сумарна плата S менша, ніж сума плат за утворення A і B та плати за зварення їх разом, тобто $S < 2a^3 + 2b^3 + (a+b)^3$. Доведемо нерівність $2a^3 + 2b^3 + (a+b)^3 < 2l^3 = 2(a+b)^3$, тобто $t^3 + (1-t)^3 < \frac{1}{2}$, $6t^2 - 6t + 1 < 0$, де $t = \frac{a}{a+b}$, $t \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$. Неважко переконатися, що на вказаному відрізку остання нерівність виконується.

Другий випадок: $a < \frac{l}{4}$. Якщо шматок B не є звареним з менших шматків, то сумарна плата менша за $2a^3 + l^3 < 2\left(\frac{l}{4}\right)^3 + l^3 < 2l^3$. В іншому випадку розглянемо крок, на якому було отримано шматок B. Нехай його було отримано зварюванням шматків C і D довжинами c і d відповідно, причому C лежав ліворуч від D. Тоді $d \le a$ (якщо $d > a$, то $c + d > a + c$, і ми не могли б зварювати C і D — у тому числі, зрозуміло, і в ситуації, коли шматок A ще не утворився). Доведемо, що шматок C не може бути звареним з менших шматків. Припустимо супротивне: нехай C був утворений на деякому кроці зі шматків E і F довжинами e і f відповідно, причому E лежав ліворуч від F. Тоді $e + f \le f + d$ і $e + f \le a + e$, тому $c = e + f \le d + a \le 2a < \frac{l}{2}$ (якщо, скажімо, шматок D ще не утворився, то беремо «найлівішу» на цей момент з утворених його частин D' довжиною d' і одержуємо, що $e + f \le f + d' < f + d$; аналогічно міркуємо і якщо шматок A ще не утворився). Звідси $l = a + b = a + c + d < 2a + \frac{l}{2} < l$, і дістаємо суперечність. Отже, шматок C існував із самого початку, і його отримання не потребує плати.
Маємо:

$$S < 2a^3 + 2d^3 + (c+d)^3 + l^3 \le 2a^3 + 2a^3 + (l-a)^3 + l^3 = l^3\left(3t^3 + 3t^2 - 3t + 2\right),$$

де $t = \dfrac{a}{l} \in \left(0; \dfrac{1}{4}\right)$.

Оскільки

$$3t^3 + 3t^2 - 3t + 2 < \frac{3t}{16} + \frac{3t}{4} - 3t + 2 < 2 - t < 2,$$

то $S < 2l^3$.

Розв'язання 2 (учасниця олімпіади Матвіїв Катерина, м. Луцьк). Для $n = 2$ твердження задачі є очевидним. Припустимо, що воно виконується для всіх $k < n$, і доведемо його для n труб. Візьмемо таке i, що $l_1 + \ldots + l_{i-1} < \dfrac{l_1 + \ldots + l_n}{2}$, $l_1 + \ldots + l_i \ge \dfrac{l_1 + \ldots + l_n}{2}$. Позначимо $a = l_1 + \ldots + l_{i-1}$, $x = l_i$, $b = l_{i+1} + \ldots + l_n$. Припустимо, що $3a \ge b + c$, і тоді, за припущенням індукції, перші $i-1$ трубу можна зварити, заплативши менше за $2a^3$, наступні $n-i+1$ трубу можна зварити за плату, меншу за $2(x+b)^3$, і останнім кроком завершити зварювання, заплативши ще $(a+x+b)^3$. Отже, у даному випадку маємо:

$$2a^3 + 2(x+b)^3 + (a+b+x)^3 \le$$

$$\le a^3 + 3a^2(b+x) + 3a(b+x)^2 + (x+b)^3 + (a+x+b)^3 = 2(a+x+b)^3.$$

Аналогічно розглядається випадок, коли $3b \ge a + x$.

Якщо $3a < x + b$ і $3b < a + x$, то, не обмежуючи загальності, вважаємо, що $a \ge b$, і тоді $x > 2a$. За припущенням індукції, перші $i-1$ трубу та останні $n-i$ труб можна зварити за оплату, меншу, ніж $2a^3 + 2b^3$. Зварюємо трубу з номером i з «правою» частиною, а потім отриману трубу з «лівою» частиною, заплативши менше, ніж $2a^3 + 2b^3 + (x+b)^3 + (a+x+b)^3$. Залишається помітити, що

$$2a^3 + 2b^3 + (x+b)^3 + (a+x+b)^3 < a^3 + 3\left(\frac{x+b}{2}\right)^3 + (x+b)^3 + (a+x+b)^3 <$$

$$< a^3 + 3(x+b)^3 + (a+x+b)^3 < 2(a+b+x)^3.$$

11.5. Знайдіть усі такі дійсні значення x, для яких виконується нерівність

$$\min(\sin x, \cos x) < \min(\operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x).$$

(Для $a \le b$ $\min(a, b) = \min(b, a) = a$.)

Розв'язання. З урахуванням області допустимих значень та періодичності достатньо розв'язувати нерівність на множині $(0;\, 2\pi)\setminus\left\{\frac{\pi}{2},\, \pi,\, \frac{3\pi}{2}\right\}$. Розглянемо такі випадки.

а) Якщо $x\in\left(0;\, \frac{\pi}{4}\right]$, то $0<\sin x\le\cos x$ і $0<\operatorname{tg}x\le\operatorname{ctg}x$. У цьому випадку вихідна нерівність рівносильна нерівності $\sin x<\operatorname{tg}x$, котра виконується для всіх $x\in\left(0;\, \frac{\pi}{2}\right)$.

б) Якщо $x\in\left(\frac{\pi}{4};\, \frac{\pi}{2}\right)$, то $0<\cos x<\sin x$ і $0<\operatorname{ctg}x<\operatorname{tg}x$. Наша нерівність матиме вигляд $\cos x<\operatorname{ctg}x$, що, зрозуміло, виконується на розглядуваному проміжку.

в) Якщо $x\in\left(\frac{\pi}{2};\, \pi\right)$, то

$$\min(\sin x,\, \cos x)=\cos x>-1,$$

$$\min(\operatorname{tg}x,\, \operatorname{ctg}x)\le\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x}{2}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{2\sin x\cos x}=\frac{1}{\sin 2x}\le-1.$$

Отже, на проміжку $\left(\frac{\pi}{2};\, \pi\right)$ вихідна нерівність не виконується.

г) Якщо $x\in\left(\pi;\, \frac{3\pi}{2}\right)$, то $\min(\sin x,\, \cos x)<0<\min(\operatorname{tg}x,\, \operatorname{ctg}x)$, тобто вихідна нерівність виконується.

д) Якщо $x\in\left(\frac{3\pi}{2};\, 2\pi\right)$, то $\min(\sin x,\, \cos x)=\sin x>-1$, $\min(\operatorname{tg}x,\, \operatorname{ctg}x)\le-1$, і тому наша нерівність не виконується.

Відповідь: $\left(\pi n;\, \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$.

11.6. Див. задачу 9.6.

11.7. Знайдіть усі натуральні числа n, для кожного з яких існують такі натуральні числа p і q, що $\left(n^2+2\right)^p=(2n-1)^q$.

Розв'язання 1. Очевидно, що $n\le4$ умову задачі не задовольняють. Безпосередньо перевіряємо, що $n=5$ задовольняє умову.

Далі вважаємо, що $n \ge 6$. Якщо r є простим дільником числа n^2+2, то $r \mid 2n-1$, і навпаки: якщо r — простий дільник числа $2n-1$, то $r \mid n^2+2$.

Отже, візьмемо спільний простий дільник r чисел n^2+2 і $2n-1$. Маємо: $n^2+2=rk$, $2n-1=rl$, де k і l — натуральні числа. Тоді $(2n)^2+8=4rk$, $(rl+1)^2+8=4rk$, $r^2l^2+2rl+9=4rk$, і тому $r \mid 9$. Оскільки число r просте, то $r=3$. Ми встановили, що $n^2+2=3^m$, $2n-1=3^s$, де m і s — натуральні числа, причому $m>s\ge 3$. Але з останніх двох рівностей випливає, що

$$\left(3^s+1\right)^2+8=4\cdot 3^m,\ 3^{2s}+2\cdot 3^s+9=4\cdot 3^m.$$

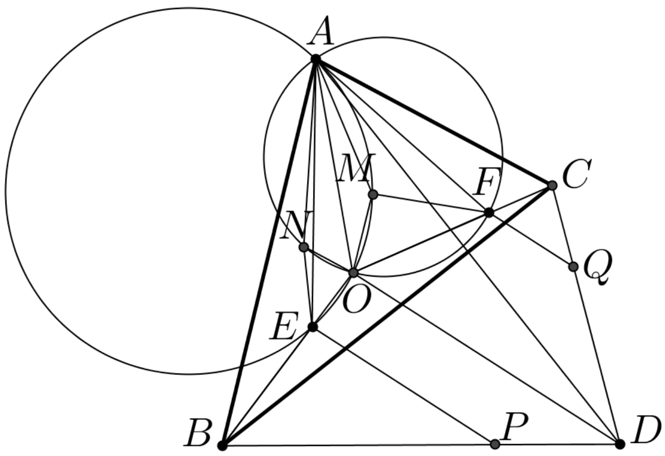
Отже, $3^s \mid 9$, що неможливо для $s \ge 3$.

Розв'язання 2. Як і вище, розглядаємо $n \ge 6$. Оскільки $n^2+2>2n-1$, то $p<q$, і тому $q=p+r$, $r\in\mathbb{N}$. Число n є непарним, тобто $n=2k+1$, $k\in\mathbb{N}$, $k\ge 3$. Запишемо рівність з умови задачі у вигляді $\left(k+\dfrac{3k+3}{4k+1}\right)^p=\left(4k+1\right)^r$. Звідси випливає, що число $\dfrac{3k+3}{4k+1}$ має бути натуральним, але ж $3k+3<4k+1$ для $k\ge 3$.

Відповідь: $n=5$.

11.8. Нехай O — центр описаного кола гострокутного трикутника ABC. На відрізках OB і OC вибрали точки E і F відповідно так, що $BE=OF$. Позначимо через M і N середини дуг AOE і AOF описаних кіл трикутників AOE і AOF відповідно. Доведіть, що $\angle ENO+\angle FMO=2\angle BAC$.

Розв'язання 1. Нехай точка D симетрична точці A відносно прямої BC. Тоді



$\angle AOC=2\angle ABC=\angle ABD$. Оскільки $OA=OB$ і $BA=BD$, то трикутники AOC і

ABD подібні. Аналогічно, $\angle AOB = \angle ACD$, і трикутники AOB та ACD подібні. З подібності названих трикутників випливає існування на відрізках BD і CD таких точок P і Q відповідно, що $\angle APB = \angle AFO$ і $\angle AQC = \angle AEO$. Оскільки $\angle ABP = \angle AOF$, то подібними будуть трикутники ABP і AOF. Маємо: $\frac{BP}{BD} = \frac{BP}{BA} = \frac{OF}{OA} = \frac{BE}{BO}$. Отже, $PE \parallel DO$. Аналогічно доводиться, що $QF \parallel DO$. Трикутник AME є рівнобедреним. До того ж, $\angle AME = \angle AOE = \angle AOB$. Це означає, що трикутники AME і AOB подібні. Звідси одержуємо, що $\angle BAE = \angle OAM$ і $\frac{AB}{AE} = \frac{AO}{AM}$, а тому подібними будуть трикутники BAE і OAM. З подібності цих трикутників випливає, що $\frac{OM}{BE} = \frac{AO}{AB}$ і $\angle AOM = \angle ABE$. Далі, трикутник AOF подібний трикутнику ABP, і $\frac{OA}{BA} = \frac{OF}{BP}$, $\angle AOF = \angle ABP$. Відтак, $\frac{OM}{BE} = \frac{OF}{BP}$ і $\angle MOF = \angle EBP$, адже $\frac{OM}{BE} = \frac{AO}{AB} = \frac{OF}{BP}$ і $\angle MOF = \angle AOF - \angle AOM = \angle ABP - \angle ABE = \angle EBP$. Ми встановили, що трикутники MOF і EBP подібні. Аналогічно доводиться подібність трикутників NOE і FCQ. У результаті маємо:

$$\angle ENO + \angle FMO = \angle QFC + \angle PEB = \angle DOC + \angle DOB = \angle BOC = 2\angle BAC,$$

що й треба було довести.

Розв'язання 2 (учасники олімпіади Вовченко Владислав і Хілько Данило, м. Київ). Зауважимо, що трикутники ANO та AFC подібні. Дійсно, оскільки чотирикутник $ANOF$ вписаний, то $\angle ANO = 180° - \angle AFO = \angle AFC$, а оскільки N — середина дуги AOF, то

$$\angle NAF = 90° - \frac{1}{2}\angle ANF = 90° - \frac{1}{2}\angle AOF = 90° - \frac{1}{2}\angle AOC = \angle OAC.$$

Отже, $\angle NAO = \angle FAC$.

Звідси $NO = \frac{FC \cdot AN}{AF}$. Аналогічно отримаємо, що $MO = \frac{EB \cdot AM}{AO}$.

Доведемо, що описані кола трикутників NOE та FOM дотикаються. Для цього застосуємо інверсію відносно кола, описаного навколо трикутника ABC. Для зручності будемо вважати, що $AO = 1$, $BE = a$, $EO = FC = b$, $a + b = 1$. Інверсійний образ точки X позначимо через X'. Точки A, N', F' лежать на одній прямій, оскільки чотирикутник $ANOF$ вписаний. Аналогічно, точки A, M', E' також лежать на одній прямій, оскільки $AMOE$. Описані кола трикутників NOE та FOM перейдуть у прямі $N'E'$ та $F'M'$ відповідно.

Доведемо, що $N'E' \parallel F'M'$ (це рівносильно дотиканню описаних кіл трикутників NOE та FOM). За властивістю інверсії,

$$AN' = \frac{AN}{OA \cdot ON} = \frac{AN}{ON} = \frac{AF}{b}, \ AF' = \frac{AF}{OA \cdot OF} = \frac{AF}{a}.$$

Звідси випливає, що $\frac{AN'}{AF'} = \frac{a}{b}$. Аналогічно отримаємо рівність $\frac{AE'}{AM'} = \frac{a}{b}$. Отже, прямі $N'E'$ і $F'M'$ паралельні.

Проведемо спільну дотичну описаних кіл трикутників NOE та FOM і позначимо через L точку її перетину з відрізком BC. Тоді

$$\angle ENO + \angle FMO = \angle EOL + \angle LOF = \angle EOF = 2\angle BAC,$$

що й треба було довести.

Розв'язання 3 (учасник олімпіади Щеглов Микита, м. Київ). Нехай $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$, $\angle ENO = \varphi$, $\angle FMO = \theta$. Трикутники ANO та AFC подібні (див. розв'язання 2). Маємо:

$$\frac{NO}{EO} = \frac{NO}{FC} = \frac{OA}{AC} = \frac{1}{2\sin\beta},$$

$$\angle NOE = \angle AOB - \angle NOA = 2\gamma - \angle NFA = 2\gamma - 90^\circ + \beta = 90^\circ + \gamma - \alpha.$$

Подібними будуть також і трикутники AMO та AEB. Тому

$$\frac{MO}{FO} = \frac{MO}{BE} = \frac{OA}{AB} = \frac{1}{2\sin\gamma},$$

$$\angle MOF = 90^\circ + \beta - \alpha.$$

За теоремою синусів для трикутника NOE,

$$\frac{NO}{\sin(90^\circ + \gamma - \alpha + \varphi)} = \frac{EO}{\sin\varphi},$$

тобто

$$\frac{1}{2\sin\beta} = \frac{\cos(\gamma - \alpha + \varphi)}{\sin\varphi} = \cos(\gamma - \alpha)\operatorname{ctg}\varphi + \sin(\gamma - \alpha).$$

Звідси

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{1 + 2\sin\beta\sin(\gamma - \alpha)}{2\sin\beta\cos(\gamma - \alpha)}.$$

Аналогічно, з трикутника FMO маємо:

$$\operatorname{ctg}\theta = \frac{1 + 2\sin\gamma\sin(\beta - \alpha)}{2\sin\gamma\cos(\beta - \alpha)}.$$

Оскільки

$$\cos(\beta - \alpha)\sin(\gamma - \alpha) + \sin(\beta - \alpha)\cos(\gamma - \alpha) = \sin(\beta + \gamma - 2\alpha) = \sin 3\alpha,$$

то одержимо, що

$$\operatorname{ctg}\varphi + \operatorname{ctg}\theta = \frac{\sin\gamma\cos(\beta - \alpha) + \sin\beta\cos(\gamma - \alpha) + 2\sin\gamma\sin\beta\sin 3\alpha}{2\sin\gamma\sin\beta\cos(\beta - \alpha)\cos(\gamma - \alpha)} =$$

$$=\frac{\sin\gamma\cos\beta\cos\alpha+2\sin\gamma\sin\beta\sin\alpha+\sin\beta\cos\gamma\cos\alpha+2\sin\gamma\sin\beta\sin3\alpha}{2\sin\gamma\sin\beta\cos(\beta-\alpha)\cos(\gamma-\alpha)}=$$

$$=\frac{\sin2\alpha+4\sin\gamma\sin\beta\sin\alpha+4\sin\gamma\sin\beta\sin3\alpha}{4\sin\gamma\sin\beta\cos(\beta-\alpha)\cos(\gamma-\alpha)}=$$

$$=\frac{\sin2\alpha(1+4\sin\gamma\sin\beta\cos\alpha)}{4\sin\gamma\sin\beta\cos(\beta-\alpha)\cos(\gamma-\alpha)}.$$

Далі,

$$\operatorname{ctg}\varphi\operatorname{ctg}\theta-1=\frac{1+2\sin\gamma\sin(\beta-\alpha)+2\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)+4\sin\beta\sin\gamma\cos3\alpha}{4\sin\beta\sin\gamma\cos(\beta-\alpha)\cos(\gamma-\alpha)}$$

$$=\frac{1+4\sin\gamma\sin\beta\cos\alpha-2\sin^2\alpha+4\sin\beta\sin\gamma\cos3\alpha}{4\sin\beta\sin\gamma\cos(\beta-\alpha)\cos(\gamma-\alpha)}$$

$$=\frac{\cos2\alpha(1+4\sin\gamma\sin\beta\cos\alpha)}{4\sin\beta\sin\gamma\cos(\beta-\alpha)\cos(\gamma-\alpha)}.$$

Отже,

$$\operatorname{ctg}(\varphi+\theta)=\frac{\operatorname{ctg}\varphi\operatorname{ctg}\theta-1}{\operatorname{ctg}\varphi+\operatorname{ctg}\theta}=\operatorname{ctg}2\alpha.$$

На проміжку $(0;\pi)$ функція $f(t)=\operatorname{ctg}t$ строго спадає, і тому $\varphi+\theta=2\alpha$, що й треба було довести.

Задачі запропонували:

8.1 В. О. Швець
8.2 О. Б. Панасенко
8.3 І. М. Мітельман
8.4 В. А. Ясінський
8.5 О. Б. Панасенко
8.6 І. П. Нагель
8.7 І. М. Мітельман, В. А. Ясінський
8.8 І. М. Мітельман, В. А. Ясінський
9.1 І. М. Мітельман
9.2 В. А. Ясінський
9.3 В. А. Ясінський
9.4 І. М. Мітельман, Д. С. Скороходов, В. А. Ясінський
9.5 І. М. Мітельман
9.6 В. А. Ясінський
9.7 Див. задачу 8.8
9.8 В. А. Ясінський
10.1 В. А. Ясінський
10.2 В. А. Ясінський
10.3 В. А. Ясінський
10.4 В. А. Ясінський
10.5 В. М. Лейфура
10.6 В. А. Ясінський
10.7 В. М. Радченко, В. А. Ясінський
10.8 В. А. Ясінський
11.1 І. М. Мітельман
11.2 Див. задачу 10.2
11.3 І. М. Мітельман
11.4 О. В. Рибак
11.5 В. М. Лейфура
11.6 Див. задачу 9.6
11.7 І. М. Мітельман, В. А. Ясінський
11.8 В. А. Ясінський