Завдання третього етапу LIII Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики

Ігор Мітельман[1], *Вадим Радченко*[2], *Георгій Шевченко*[3], *В'ячеслав Ясінський*[4]

20 січня 2013 року в Автономній Республіці Крим, двадцяти областях України та м. Севастополі пройшли змагання третього етапу 53-ї Всеукраїнської олімпіади юних математиків за матеріалами, наданими Інститутом інноваційних технологій і змісту освіти Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України.

Завдання були розроблені за двома рівнями складності. Рівень "А" був рекомендований регіонам, які в рейтингу Всеукраїнської математичної олімпіади за підсумками двох останніх років посідають місця, не нижчі за десяте, рівень "Б" — решті.

Умови задач.
7 клас. Рівень "А"

1. Знайдіть усі такі чотирицифрові числа $\overline{abcd}$, для яких виконується рівність $\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} + a = 2013$.

2. Серед 25 монет є рівно 2 фальшиві. Є чарівна скринька, в яку можна покласти 2 монети, і вона покаже кількість фальшивих монет у цій парі. Покажіть, як можна визначити обидві фальшиві монети не більше, ніж за 13 таких операцій.

3. Петрик послідовно виписує в рядок на дошці остачі від ділення деякого натурального числа n на $10, 11, 12, \ldots, 20$. Виявилося, що кожне наступне записане число більше за попереднє. Доведіть, що в рядку записано 11 послідовних цілих чисел (тобто кожне наступне число більше за попереднє на 1).

4. Прямокутне приміщення розділене на 16 прямокутних кімнат. Комендант виміряв периметри восьми кімнат. Сім з восьми результатів його вимірювань схематично (тобто без урахування справжніх розмірів кімнат) показано на рис. 1, а результат восьмого позначено через x. Знайдіть значення x.

7		13	
		10	7
10	11		
	5		x

Рис. 1.

5. З картону вирізано декілька прямокутників. На площині намальовано квадрат, сторона якого не менша за будь-яку сторону кожного з прямокутників, а периметр не менший за суму периметрів прямокутників. Доведіть, що всі вирізані прямокутники можна без перекриттів розмістити в намальованому квадраті (тобто будь-які два прямокутники можуть мати тільки такі спільні точки, які лежать на їхніх сторонах, і точки жодного з прямокутників не можуть вийти за межі квадрата).

---

[1]викладач Рішельєвського ліцею, доцент Одеського обласного інституту вдосконалення вчителів, кандидат фізико-математичних наук

[2]професор Київського національного університету імені Тараса Шевченка, доктор фізико-математичних наук

[3]докторант Київського національного університету імені Тараса Шевченка, доцент, кандидат фізико-математичних наук

[4]доцент Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського

7 клас. Рівень “Б”

1. Див. задачу 1 рівня “А”, 7 клас.
2. Серед 25 монет є рівно 2 фальшиві. Є чарівна скринька, в яку можна покласти 2 монети, і вона покаже кількість фальшивих монет у цій парі. Покажіть, як можна визначити обидві фальшиві монети не більше, ніж за 14 таких операцій.
3. Андрійко, Миколка, Оленка, Сергійко й Даринка посіли п’ять перших місць на математичній олімпіаді (жодне з місць не було розділено між декількома учасниками). Кожен з них знає, яке місце він зайняв. Оленка знає, що різниця місць Сергійка й Андрійка (у вказаному порядку) дорівнює двом. Також вона знає, що Даринка зайняла не перше місце, і тому Оленка може відновити розподіл місць між цією п’ятіркою учасників олімпіади. Яке місце зайняла Даринка?
4. Див. задачу 3 рівня “А”, 7 клас.
5. Див. задачу 4 рівня “А”, 7 клас.

8 клас. Рівень “А”

1. Чебурашка та Крокодил Гена з’їли торт. Чебурашка їв удвічі повільніше за Крокодила Гену, але почав їсти на хвилину раніше. З’ясувалося, що вони з’їли порівну. За який час Чебурашка сам з’їв би цей торт?
2. Відомо, що трицифрове число $\overline{mnk}$ на 1 більше за трицифрове число $\overline{abc}$. Доведіть, що число $\overline{abcmnk}$ не може ділитися без остачі на 13.
3. На дошці написані числа 1, 2, 3, ..., 4027, 4028. Миколка та Андрійко по черзі закреслюють числа, причому Миколка ходить першим. За один хід можна закреслити тільки одне з раніше незакреслених чисел. Андрійко хоче, щоб після його 2013-го ходу на дошці залишилися два послідовні числа (тобто числа, різниця яких дорівнює 1). Чи завжди він зможе цього досягти?
4. Знайдіть усі пари простих чисел p і q, для яких число $p^3 + q^2$ є кубом деякого натурального числа.
5. У гострокутному трикутнику ABC проведено бісектриси AA_1 і BB_1. Відомо, що на відрізку CB_1 існує така точка M, що $CM = CA_1$. Через точку M проведено пряму, яка паралельна BB_1 і перетинає пряму AB в точці N. Доведіть, що $A_1N = A_1M$.

8 клас. Рівень “Б”

1. Див. задачу 1 рівня “А”, 8 клас.
2. Керівник математичного гуртка дав учням завдання виписати у порядку зростання всі чотирицифрові числа $\overline{abcd}$, в яких $1 \le a < b < c < d \le 9$. Яке число буде записаним на 53-му місці?
3. Див. задачу 3 рівня “А”, 8 клас.
4. Дано гострокутний трикутник ABC. Кола k_1 і k_2 проходять через вершину A і дотикаються до прямої BC в точках B і C відповідно. Висота BK трикутника ABC перетинає коло k_1 у точці P, відмінній від B, а висота CL перетинає коло k_2 в точці Q, відмінній від C. Доведіть, що точки A, P і Q лежать на одній прямій.
5. Див. задачу 4 рівня “А”, 8 клас.

9 клас. Рівень “А”

1. Відомо, що $a \neq b$ та рівняння $ax^{2013} + x^{2012} + b = 0$ і $bx^{2013} + x^{2012} + a = 0$ мають спільний дійсний корінь. Знайдіть $a + b$.
2. Знайдіть усі такі пари простих чисел p і q, для яких має місце рівність

$$p^5 - (4p - q)^2 = 2q^2.$$

3. Доведіть, що для будь-яких дійсних чисел a, b і c виконується нерівність

$$3a^2 + b^2 + c^2 + bc \geq 3a\,(b + c)\,.$$

4. Нехай H — точка перетину висот AQ, BL і CP гострокутного трикутника ABC, K — спільна точка відрізків PQ і BH, M — середина сторони AC, N — середина відрізка BH. Промінь BL перетинає описане коло трикутника ABC в точці D, відмінній від B. Відомо, що $KQ = HQ$. Доведіть, що прямі MN і AD перпендикулярні.
5. Керівник математичного гуртка намалював на дошці таблицю розміру 30×30 і запропонував учням заповнити її числами $1, 2, \ldots, 900$, записуючи щосекунди в якусь порожню клітинку на свій розсуд одне з тих чисел, що не використовувалися раніше. Чи зможуть учні виконати завдання так, щоб у будь-який момент ані в жодному рядку, ані в жодному стовпці сума всіх записаних чисел не давала остачу 1 від ділення на 3?

9 клас. Рівень “Б”

1. Сума двох натуральних чисел дорівнює 20132013, і якщо в одному з них закреслити останню цифру, то отримаємо друге число. Знайдіть усі такі пари чисел.
2. Див. задачу 1 рівня “А”, 9 клас.
3. У трапеції $ABCD$ з основами AD і BC, $AD > BC$, діагоналі AC і BD перетинаються в точці E. Дотична до описаного кола трикутника BCE, проведена в точці E, перетинає пряму AD в точці F, причому точка D лежить між точками A і F. Відомо, що $AF = a$, $AD = b$. Знайдіть довжину відрізка EF.
4. Доведіть, що для довільних додатних дійсних чисел x, y і z має місце нерівність

$$\frac{x\,(y - x)}{x + y} + \frac{y\,(z - y)}{y + z} \leq \frac{z - x}{2}.$$

5. Див. задачу 5 рівня “А”, 9 клас.

10 клас. Рівень “А”

1. Розв’яжіть рівняння

$$x^{2013} - x^{2014} = \left\{ \frac{2015 + x}{1 + [x]} \right\}$$

(тут $[a]$ — ціла частина числа a, тобто найбільше ціле число, яке не перевищує a; $\{a\} = a - [a]$ — дробова частина числа a).
2. Натуральне число a має рівно 6 різних натуральних дільників (включаючи 1 і саме число a). Аналогічно, натуральне число b має рівно 9 різних натуральних дільників, а натуральне число c має рівно 14 різних натуральних дільників. Відомо, що НСД$(a, b, c) = 10$. Знайдіть усі можливі значення добутку НСД$(a, b) \cdot$ НСД$(b, c) \cdot$ НСД(c, a). (Тут НСД(x, y) — найбільший спільний дільник натуральних чисел x і y, НСД(a, b, c) — найбільший спільний дільник натуральних чисел a, b і c.)
3. Відомо, що додатні дійсні числа x, y і z задовольняють нерівність $3x+4y+6z \leq 12$. Доведіть, що $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq 3$.
4. Нехай AK, BL і CM — висоти гострокутного трикутника ABC. Відомо, що $LM =$ 5 см, $MK = 12$ см, $KL = 13$ см. Обчисліть площу трикутника ABC.
5. По колу записали 672 натуральних числа $a_1, a_2, \ldots, a_{672}$ таких, що $a_1+a_2+\ldots+a_{672} =$ 2013 і $a_k \neq 1342$ для всіх k, $1 \leq k \leq 672$. Доведіть, що завжди можна вибрати декілька записаних поспіль чисел, сума яких дорівнює 1342.

10 клас. Рівень "Б"

1. Чи можна зобразити на прямій шість відрізків так, щоб серед будь-яких трьох зображених відрізків знайшлися принаймні два, які мають хоча б одну спільну точку, і кожна точка прямої належала щонайбільше трьом зображеним відрізкам? (Вважається, що кінці відрізків належать самим відрізкам.)
2. Знайдіть усі такі пари натуральних чисел m і n, для яких виконується рівність $mn - \sqrt{m^2 + n^2} = 7$.
3. Відомо, що додатні дійсні числа x і y задовольняють нерівність $2x + 7y \leq 14$. Доведіть, що $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 3$.
4. Див. задачу 4 рівня "А", 9 клас.
5. Див. задачу 5 рівня "А", 10 клас.

11 клас. Рівень "А"

1. Зобразіть на координатній площині Oxy множину всіх точок, координати яких задовольняють рівність $\sin x + \cos y = \sin y + \cos x$.
2. Для $x \in (0; 1)$ та $y \in (0; 1)$ знайдіть найбільше можливе значення виразу

$$\frac{xy\,(1 - x - y)}{(x + y)\,(1 - x)\,(1 - y)}.$$

3. Нехай вписане коло трикутника ABC дотикається до його сторін AB, AC і BC в точках D, E і F відповідно. Пряма, яка проходить через точку F і центр цього кола, перетинає відрізок DE в точці L. Доведіть, що пряма AL проходить через середину сторони BC.
4. Знайдіть усі такі визначені на множині всіх дійсних чисел числові функції f, що для будь-яких $x \in \mathbb{R}$ і $y \in \mathbb{R}$ має місце рівність

$$f\,(xf(y)) + f\,(y + f(x)) - f\,(x + yf(x)) = x.$$

5. Див. задачу 5 рівня “А”, 10 клас.

11 клас. Рівень “Б”

1. Див. задачу 1 рівня “А”, 11 клас.
2. Див. задачу 1 рівня “А”, 10 клас.
3. У трикутнику ABC $AB = 16$ см, $BC = 25$ см, $AC = 39$ см. Пряма, яка проходить через центр вписаного кола трикутника ABC і середину M сторони BC, перетинає висоту AD цього трикутника в точці P. Знайдіть довжину відрізка AP.
4. Див. задачу 4 рівня “А”, 11 клас.
5. Нехай x_1 — довільне дійсне число, і для всіх натуральних n виконується рівність

$$x_{n+1} = \sqrt{7}x_n + 2\sqrt{x_n^2 + 4}.$$

Доведіть, що серед чисел x_1, x_2, $\ldots$, x_{2013} принаймні 1005 чисел є ірраціональними.

Розв’язання та вказівки.
7 клас. Рівень “А”

1. За умовою маємо рівність $1111a + 111b + 11c + d = 2013$. Ураховуючи, що цифри не перевищують 9, послідовно однозначно отримуємо $a = 1$, $b = 8$, $c = 1$, $d = 3$.
Відповідь: $\overline{abcd} = 1813$.
2. Відокремимо три монети A, B, C. Решту монет розіб’ємо на пари і зробимо 11 вимірювань для цих пар. При цьому якщо скринька показала “2”, то фальшиві монети визначено. Розглядаємо інші випадки.

Випадок 1. Якщо скринька для всіх 11 вимірів показала “0”, то серед монет A, B, C дві фальшиві. Далі ми покладемо до скриньки A і B, а потім A і C. Якщо скринька обидва рази показує “1”, то фальшивими є B і C, в іншому випадку хоча б один раз скринька покаже “2”.

Випадок 2. Скринька один раз показала “1”, і нехай це було для пари монет D і E. Тоді ще перевіряємо D і A, а також D і B. Для показників “0” і “0” фальшивими будуть E і C, для “0” і “1” — E і B, для “1” і “0” — E і A, для “1” і “1” — монети D і C.

Випадок 3. Скринька двічі показала “1”, і нехай це було для пар монет D і E, F і G. Тоді ще перевіряємо D і F, а також D і G. Для показників “0” і “1” фальшивими будуть E і G, для “1” і “0” — E і F. Інші ситуації або неможливі, або ж для них скринька покаже значення “2”.
3. Остачі від ділення числа n на 10 і 20 або співпадають, або відрізняються на 10 (це випливає з рівностей $n = 10q + r$, $n = 20q_1 + r_1$, де $0 \le r \le 9$, $0 \le r_1 \le 19$). Перший випадок неможливий. У другому випадку між цими остачами буде 9 інших остач, і це мають бути послідовні натуральні числа.
Зауваження. Потрібну умову задовольняють усі числа $n \equiv -9 \pmod{M}$, де M — найменше спільне кратне чисел $10, 11, \ldots, 19, 20$.
4. Помітимо, що периметр усього приміщення дорівнює як сумі периметрів прямокутників, у яких записані літери A, B, C, D, так і сумі периметрів прямокутників, що містять літери E, F, G, H (рис. 2). Тому $10 + 5 + 13 + 7 = 7 + 11 + 10 + x$.

Відповідь: $x = 7$.

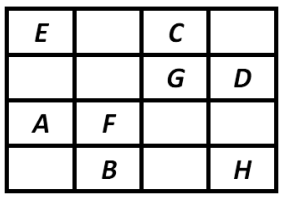

Рис. 2.

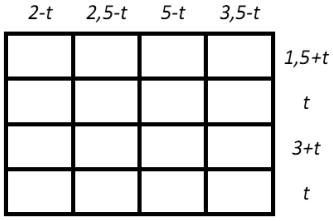

Рис. 3.

Зауваження. Такі ситуації можливі. Усі вони зображені на рис. 3 ($t \in (0; 2)$ довільне).

5. У кожного прямокутника відмітимо найменшу сторону. Сума відмічених сторін не більша за чверть суми периметрів прямокутників, а тому не більша за сторону квадрата. Отже, достатньо викласти усі прямокутники один за одним, приклавши їх "короткими" сторонами до однієї зі сторін квадрата.

7 клас. Рівень "Б"

2. Відокремимо монету A. Решту монет розіб'ємо на пари і зробимо 12 вимірювань для цих пар. При цьому якщо скринька хоч раз покаже "2", то фальшиві монети визначено. Розглядаємо інші випадки.

Випадок 1. Скринька один раз показала "1", нехай це було для пари монет B і C. Тоді A фальшива. Ще виміряємо B і A, і за отриманим показником визначимо, яка з монет B і C є другою фальшивою.

Випадок 2. Скринька двічі показала "1", нехай це було для пар монет B і C, D і E. Тоді ще перевіримо пару B і D, а також пару B і E. Для показників "0" і "1" фальшивими будуть монети C і E, для "1" і "0" — монети C і D. Інші ситуації або неможливі, або ж для них скринька покаже значення "2".

Зауваження. Також можна використати алгоритм, описаний у розв'язанні задачі 2 рівня "А".

3. Андрійко та Сергійко посіли, відповідно, або перше і третє, або друге і четверте, або третє і п'яте місця. Якщо Оленка зайняла третє місце, то Андрійко й Сергійко отримали друге і четверте місця, а Даринка — п'яте місце. Якщо ж місце Оленки відмінне від третього, то є два варіанти місць Андрійка й Сергійка, у кожному з яких Оленка може мати місце, відмінне від першого, і тому Оленка не може однозначно визначити розподіл місць для цієї п'ятірки учнів.

Відповідь: п'яте місце.

8 клас. Рівень "А"

1. За першу хвилину Чебурашка мав з'їсти стільки ж, скільки з'їв одночасно з Крокодилом Геною. Усього він з'їв половину торта, тому за хвилину він з'їв чверть торта.

Відповідь: за 4 хвилини.

2. Маємо $\overline{abcmnk} = 1000\overline{abc} + \overline{mnk} = 1000\overline{abc} + \overline{abc} + 1 = 1001\overline{abc} + 1$. Оскільки 1001 ділиться без остачі на 13, то $\overline{abcmnk}$ на 13 не ділиться.

3. Розіб'ємо числа на 2014 пар: $(1,2)$, $(3,4)$, $\ldots$, $(4027,4028)$. Якщо Миколка своїм ходом закреслює число однієї з пар, то Андрійко відповідає закреслюванням іншого числа в тій же самій парі. Після 2013-го ходу Андрійка залишаються два числа з однієї пари.
Відповідь: так, зможе.
4. Нехай $p^3+q^2=n^3$, тоді $q^2=n^3-p^3=(n-p)(n^2+np+p^2)$. Оскільки число q просте і $n-p<n^2+np+p^2$, то $n-p=1$ і $q^2=3p^2+3p+1 \quad (*)$.

Останню рівність запишемо у вигляді $(q-1)(q+1)=3p^2+3p$. Зазначимо тепер, що $q-1$ або $q+1$ ділиться без остачі на просте число p.

З рівності $(*)$ отримуємо такі нерівності:

$$(p+1)^2<q^2<(2p+1)^2, \quad p+1<q<2p+1, \quad p<q-1<2p, \quad p+2<q+1<2p+2.$$

Отже, $q-1$ не може ділитися без остачі на p, і кратним числу p буде $q+1$, причому можливим є лише випадок $q+1=2p$, тобто $q=2p-1$. Підставляючи $q=2p-1$ у рівність $(*)$, отримуємо $p=7$, $q=13$.
Відповідь: $p=7$, $q=13$.
5. Позначимо через I точку перетину бісектрис трикутника ABC і проведемо $A_1K\perp BB_1$ (рис. 4). Тоді трикутники BA_1K і CA_1M рівнобедрені. Отже,

$$\angle BA_1K=90^\circ-\tfrac{1}{2}\angle ABC, \quad \angle CA_1M=90^\circ-\tfrac{1}{2}\angle ACB,$$

$$\angle MA_1K=180^\circ-\angle BA_1K-\angle CA_1M=90^\circ-\tfrac{1}{2}\angle BAC.$$

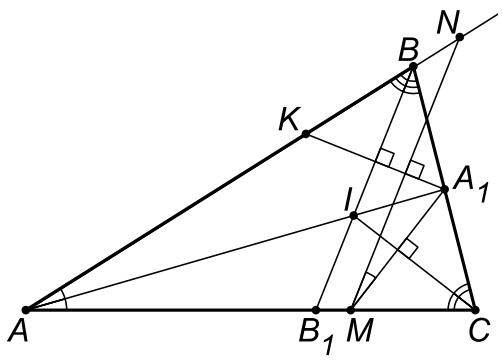

Рис. 4.

За умовою $MN\parallel BB_1$, тому $MN\perp A_1K$ і $\angle NMA_1=90^\circ-\angle MA_1K=\frac{1}{2}\angle BAC=\angle A_1AM$. Отже, точки A, M, A_1, N лежать на одному колі та $A_1N=A_1M$ як хорди цього кола, на які спираються рівні вписані кути.

8 клас. Рівень "Б"

2. Перші 6 чисел — це 1234, 1235, $\ldots$, 1239, наступні 5 чисел — 1245, $\ldots$, 1249, далі маємо 4 числа вигляду $\overline{125d}$, 3 числа вигляду $\overline{126d}$, 2 числа вигляду $\overline{127d}$, і 21-м буде число 1289. Аналогічно, з комбінації цифр 13 буде починатися $5+4+3+2+1=15$

чисел, з комбінації цифр 14 — $4+3+2+1=10$ чисел, з комбінації цифр 15 — $3+2+1=6$ чисел. Отже, на 53-му місці буде число 1678.
Відповідь: 1678.
4. Нехай $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$, $\angle C=\gamma$ — кути трикутника ABC. Тоді, використовуючи теорему про кут між дотичною та хордою, одержимо (рис. 5)

$$\angle BAP=\angle CBP=\angle CBK=90^\circ-\gamma,\quad \angle CAQ=\angle BCQ=90^\circ-\beta,$$

тобто $\angle BAP+\angle CAQ=180^\circ-\gamma-\beta=\alpha$. Оскільки точки P і Q лежать всередині трикутника ABC, то промені AP та AQ збігаються, тобто точки A, P і Q лежать на одній прямій.

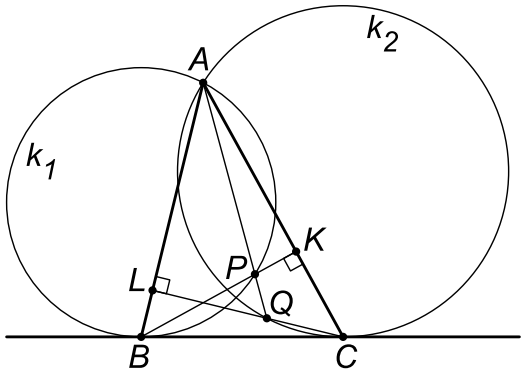

Рис. 5.

9 клас. Рівень "А"

1. Нехай x_0 — спільний корінь цих рівнянь. Тоді

$$ax_0^{2013}+b=bx_0^{2013}+a,\quad (a-b)\,x_0^{2013}=a-b.$$

Оскільки $a\neq b$, то $x_0=1$. Отже, $a+b=-1$.
Відповідь: -1.
2. Запишемо вихідну рівність у вигляді $p\left(p^4-16p+8q\right)=3q^2$. Отже, $3q^2$ ділиться на p, звідки $p=3$ або $q=p$. Для $q=p$ маємо $p^4-8p=3p$, $p^3=11$, що неможливо. Якщо $p=3$, то $q^2-8q-33=0$, $q=-3$, $q=11$.
Відповідь: $p=3$, $q=11$.
3. *I спосіб.* Оскільки для всіх дійсних x і y

$$x^2+xy+y^2=\tfrac{1}{2}\left((x+y)^2+x^2+y^2\right)\geq 0,$$

то $(a-b)^2+(a-b)(a-c)+(a-c)^2\geq 0$, звідки після розкриття дужок та зведення подібних дістаємо потрібну нерівність.

II спосіб. Розглянемо вираз $3a^2+3(b+c)a+(b^2+c^2+bc)$ як квадратний тричлен відносно a. Його дискримінант

$$3\left(3(b+c)^2-4\left(b^2+c^2+bc\right)\right)=-3(b-c)^2\leq 0,$$

тому даний вираз при всіх a, b і c набуває лише невід'ємних значень.
4. Точка M — середина спільної гіпотенузи AC прямокутних трикутників PAC і QAC, тому $PM = QM$. Аналогічно точка N — середина спільної гіпотенузи BH прямокутних трикутників PBH і QBH, звідки $PN = QN$. Отже, $PQ \perp MN$. Залишається довести, що $PQ \parallel AD$, тобто $\angle BKP = \angle BDA$. Навколо чотирикутника $PBQH$, в якому $\angle P = \angle Q = 90°$, можна описати коло, і тому $\angle QHB = \angle QPB$. Далі, чотирикутник $ACQP$ також є вписаним і $\angle ACQ = 180° - \angle APQ = \angle BPK$. З урахуванням рівностей $\angle QHB = \angle QKH = \angle BKP$, $\angle BDA = \angle ACQ$ маємо потрібний результат.
Зауваження. Добре відомо, що точки H і D симетричні відносно прямої AC. Тому $\angle ADH = \angle AHD = \angle QHK = \angle QKH$, звідки випливає паралельність прямих PQ і AD.

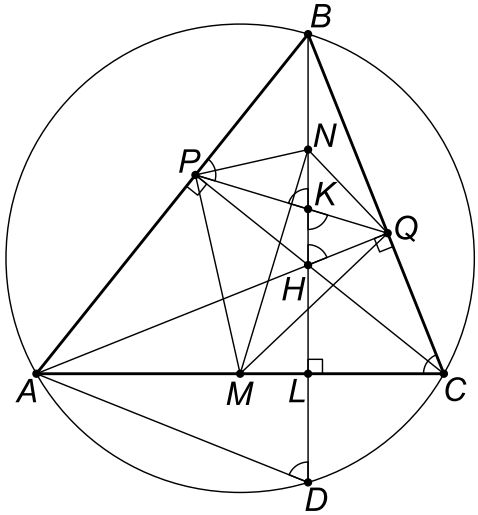

Рис. 6.

5. Доведемо, що це можливо. Серед чисел 1, 2, ..., 900 остачу 1 від ділення на 3 дають 300 чисел, остачу 2 дають також 300 чисел, і 300 чисел є кратними 3. Розіб'ємо таблицю на 225 квадратів розміру 2×2. Візьмемо спочатку 150 квадратів. У кожному з них спочатку на одній діагоналі записуємо два числа, що дають остачу 2 від ділення на 3, після чого на другій його діагоналі — два числа, що дають остачу 1 від ділення на 3. Решту 75 квадратів довільним чином заповнюємо числами, які діляться на 3.
Відповідь: так, зможуть.

9 клас. Рівень "Б"

1. Нехай n — менше з цих чисел, а x, $0 \le x \le 9$, — закреслена цифра в більшому з чисел. Тоді $n + 10n + x = 20132013$, $11n + x = 20132013$. Оскільки 20132013 ділиться на 11, то $x = 0$, $n = 1830183$.
Відповідь: 1830183, 18301830.
3. Трикутники AEF і EDF подібні, бо вони мають спільний кут F і $\angle FAE = \angle ACB = \angle FED$ (ми використали, що кут між дотичною EF і хордою BE дорівнює вписаному куту BCE, див. рис. 7). З подібності цих трикутників випливає пропорція $\frac{AF}{EF} = \frac{EF}{DF}$. Отже, $EF^2 = AF \cdot DF = a\,(a - b)$.

Відповідь: $\sqrt{a\,(a-b)}$.

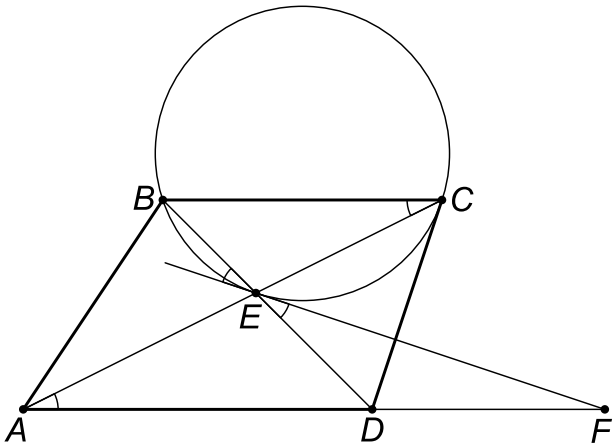

Рис. 7.

4. Запишемо нерівність у вигляді

$$\frac{x\,(y-x)}{x+y}+\frac{y\,(z-y)}{y+z}\le\frac{z-y}{2}+\frac{y-x}{2}.$$

Маємо

$$\frac{x\,(y-x)}{x+y}\le\frac{y-x}{2}\Leftrightarrow(y-x)\left(\frac{x}{x+y}-\frac{1}{2}\right)\le 0\Leftrightarrow(y-x)\,(x-y)\le 0\Leftrightarrow-(x-y)^2\le 0.$$

Аналогічно доводиться нерівність

$$\frac{y\,(z-y)}{y+z}\le\frac{z-y}{2}.$$

З доведених нерівностей випливає шукана.

10 клас. Рівень "А"

1. З умови випливає, що $x^{2013}\,(1-x)\ge 0$, тобто $0\le x\le 1$. Неважко бачити, що $x=0$ та $x=1$ є коренями рівняння.

Для $x\in(0;\,1)$ маємо $[x]=0$, $\{2015+x\}=\{x\}=x$, $x^{2013}<x+x^{2014}$.

Відповідь: $x=0$, $x=1$.

2. Неважко встановити, що якщо $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_m^{\alpha_m}$ — канонічний розклад натурального числа $n>1$, то кількість $\tau(n)$ усіх його натуральних дільників (включаючи 1 та n) дорівнює $\tau(n)=(\alpha_1+1)\,(\alpha_2+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_m+1)$. Оскільки $6=2\cdot 3$, $9=3\cdot 3$, $14=2\cdot 7$, то кожне з чисел a, b і c має рівно 2 різних простих дільника. Але числа a, b і c діляться на 10, тому всі їхні прості дільники це 2 та 5. Звідси $b=2^2\cdot 5^2$, $a=2^1\cdot 5^2$ або $a=2^2\cdot 5^1$, $c=2^1\cdot 5^6$ або $c=2^6\cdot 5^1$. З урахуванням умови НСД$\,(a,b,c)=10$ можливими є лише такі випадки:

$$a=2^1\cdot 5^2,\quad b=2^2\cdot 5^2,\quad c=2^6\cdot 5^1;$$

$$a = 2^2 \cdot 5^1, \quad b = 2^2 \cdot 5^2, \quad c = 2^1 \cdot 5^6.$$

Для обох цих випадків НСД $(a,\, b) \cdot$ НСД $(b, c) \cdot$ НСД $(c, a) = 2^4 \cdot 5^4 = 10\,000$.
Відповідь: 10 000.

3. Оскільки $3x + 4y + 6z \le 12$, то $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} \le 1$. Скористаємося нерівністю Коші-Буняковського:

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} = \sqrt{\frac{x}{4}}\cdot\sqrt{4}+\sqrt{\frac{y}{3}}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{\frac{z}{2}}\cdot\sqrt{2} \le \sqrt{\frac{x}{4}+\frac{y}{3}+\frac{z}{2}}\cdot\sqrt{4+3+2} \le \sqrt{1}\cdot\sqrt{9} = 3.$$

4. Оскільки $\frac{AL}{AB} = \cos\angle A = \frac{AM}{AC}$, то трикутник ALM подібний трикутнику ABC з коефіцієнтом $\cos\angle A$. Аналогічно, трикутнику ABC подібні й трикутники BMK і CKL з коефіцієнтами $\cos\angle B$ і $\cos\angle C$ відповідно. Тому

$$\begin{aligned} S_{MKL} =& S_{ABC} - S_{ALM} - S_{BMK} - S_{CKL} = \\ =& S_{ABC} - \cos^2\angle A \cdot S_{ABC} - \cos^2\angle B \cdot S_{ABC} - \cos^2\angle C \cdot S_{ABC} = \\ =& \left(1 - \cos^2\angle A - \cos^2\angle B - \cos^2\angle C\right) S_{ABC}. \end{aligned}$$

Очевидно, що трикутник MKL прямокутний ($\angle KML = 90^\circ$), а тому $S_{MKL} = 30$ см^2.

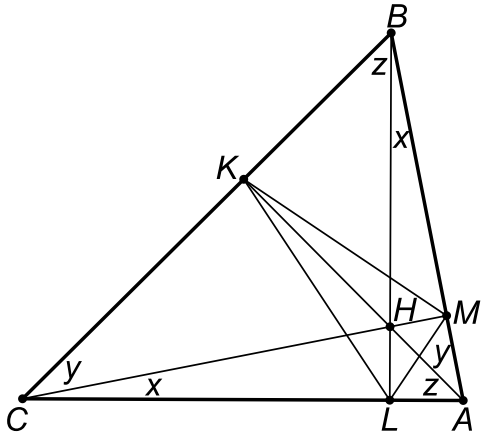

Рис. 8.

Чотирикутник $ALKB$ є вписаним у коло з діаметром AB, звідки $\angle AKL = \angle ABL = x = 90^\circ - \angle A = \angle ACM$. Аналогічні співвідношення одержуємо для кутів x, y і z, відмічених на рис. 8. З прямокутних трикутників ALB, BKA і CLB одержуємо

$$\begin{aligned} 1 - \cos^2\angle A - \cos^2\angle B - \cos^2\angle C =& 1 - \sin^2 x - \sin^2 y - \sin^2 z = \\ =& 1 - \tfrac{1-\cos 2x}{2} - \tfrac{1-\cos 2y}{2} - \tfrac{1-\cos 2z}{2} = \tfrac{1}{2}\left(\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z - 1\right) = \\ =& \tfrac{1}{2}\left(\cos\angle MKL + \cos\angle KLM + \cos\angle LMK - 1\right) = \tfrac{2}{13}. \end{aligned}$$

Отже, $S_{ABC} = 195$ см^2.
Відповідь: 195 см^2.

5. Розіб'ємо деяке коло 2013 точками на 2013 рівних дуг. Серед цих точок відмітимо 672 точки M_0, M_1, ..., M_{671} так, щоб кожна з дуг M_iM_{i+1}, $i \le 0 \le 671$, виявилась

розбитою на a_{i+1} рівних дуг (тут $M_{672} = M_0$). Точки M_0, M_1, ..., M_{671} пофарбуємо у чорний колір, а решту точок — у білий колір. Зауважимо, що 2013 ділиться на 3, тому дані 2013 точок можна розбити на набори вершин декількох рівносторонніх трикутників. Дістанемо 671 рівносторонній трикутник. Оскільки чорних точок більше, ніж трикутників, то знайдеться рівносторонній трикутник, у якому чорних вершин принаймні дві. Меншу дугу кола з кінцями в цих вершинах буде розбито на 671 рівну частину, а більшу — на 1342 рівні частини. З іншого боку, більша дуга складається з декількох (щонайменше з двох) дуг з чорними кінцями. Числа з набору a_1, a_2, ..., a_{672}, які відповідають цим дугам, є шуканими.

10 клас. Рівень "Б"

1. Умову задовольняють, наприклад, відрізки $[0;1]$, $[0;2]$, $[0;3]$, $[2;5]$, $[3;5]$ і $[4;5]$.
Відповідь: так, можна.
2. Число $\sqrt{m^2+n^2} = mn - 7$ є натуральним. Далі,

$$mn = \sqrt{m^2+n^2} + 7, \quad 2mn = 2\sqrt{m^2+n^2} + 14,$$

$$m^2+n^2+2mn = m^2+n^2+2\sqrt{m^2+n^2}+14, \quad (m+n)^2 - \left(\sqrt{m^2+n^2}+1\right)^2 = 13,$$

$$\left(m+n-\sqrt{m^2+n^2}-1\right)\left(m+n+\sqrt{m^2+n^2}+1\right) = 13.$$

Оскільки число 13 просте та числа в дужках останньої рівності (яка рівносильна рівності з умови задачі) є натуральними, причому

$$m+n-\sqrt{m^2+n^2}-1 < m+n+\sqrt{m^2+n^2}+1,$$

то

$$\begin{cases} m+n-\sqrt{m^2+n^2}-1 = 1, \\ m+n+\sqrt{m^2+n^2}+1 = 13. \end{cases}$$

Розв'язавши систему цих рівнянь, знаходимо відповідь.
Відповідь: $m = 3$, $n = 4$; $m = 4$, $n = 3$.
3. Оскільки $2x+7y \le 14$, то $\frac{x}{7}+\frac{y}{2} \le 1$. Скористаємося нерівністю Коші-Буняковського:

$$\sqrt{x}+\sqrt{y} = \sqrt{\frac{x}{7}}\cdot\sqrt{7}+\sqrt{\frac{y}{2}}\cdot\sqrt{2} \le \sqrt{\frac{x}{7}+\frac{y}{2}}\cdot\sqrt{7+2} \le \sqrt{1}\cdot\sqrt{9} = 3.$$

11 клас. Рівень "А"

1. Маємо

$$(\sin x - \sin y) + (\cos y - \cos x) = 2\sin\tfrac{x-y}{2}\cos\tfrac{x+y}{2} + 2\sin\tfrac{x-y}{2}\sin\tfrac{x+y}{2} =$$
$$= 2\sin\tfrac{x-y}{2}\left(\cos\tfrac{x+y}{2} - \cos\tfrac{\pi+x+y}{2}\right) = 4\sin\tfrac{x-y}{2}\sin\left(\tfrac{x+y}{2}+\tfrac{\pi}{4}\right)\sin\tfrac{\pi}{4}.$$

Звідси випливає, що слід зобразити дві сукупності паралельних прямих:

$$y = x + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad y = -x - \frac{\pi}{2} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

2. Для $x = y = \frac{1}{3}$ значення цього виразу дорівнює $\frac{1}{8}$. Доведемо, що це значення є найбільшим можливим.

Якщо $x + y \geq 1$, то

$$\frac{xy\,(1 - x - y)}{(x + y)\,(1 - x)\,(1 - y)} \leq 0.$$

Нехай $x + y < 1$. Позначимо $z = 1 - x - y$. Тоді потрібно довести, що

$$xyz \leq \tfrac{1}{8}\,(x + y)\,(y + z)\,(x + z)\,.$$

Дана нерівність випливає з нерівностей $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$, $\sqrt{yz} \leq \frac{y+z}{2}$, $\sqrt{xz} \leq \frac{x+z}{2}$.
Відповідь: $\frac{1}{8}$.

3. *I спосіб.* Проведемо через точку L відрізок $B_1C_1 \parallel BC$ (рис. 9). Тоді трикутники ABC та AB_1C_1 гомотетичні та достатньо довести, що $B_1L = C_1L$. Оскільки $ID \perp AB$, $IE \perp AC$, $IL \perp B_1C_1$, то чотирикутники IDB_1L та $ILEC_1$ є вписаними у кола з діаметрами IB_1 та IC_1 відповідно. Враховуючи, що трикутник IDE рівнобедрений ($DI = EI$ як радіуси вписаного кола), звідси дістаємо $\angle IB_1L = \angle IDL = \angle IEL = \angle IC_1L$. Отже, трикутник B_1IC_1 рівнобедрений та його висота IL є медіаною, що завершує доведення.

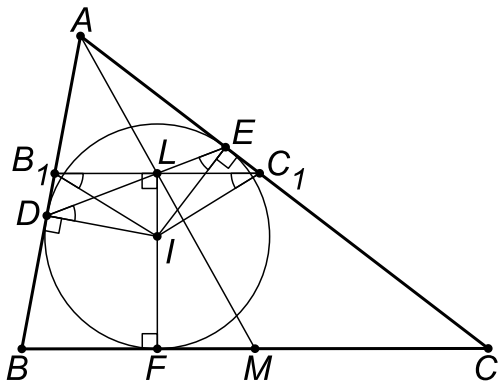

Рис. 9.

II спосіб. Позначимо $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$, $\angle BAL = x$, $\angle CAL = y$. Нехай пряма AL перетинає сторону BC в точці M. Тоді $\angle DIL = 180^\circ - \angle DIF = \beta$, аналогічно $\angle EIL = \gamma$.

За теоремою синусів

$$\frac{DL}{DI} = \frac{\sin\angle DIL}{\sin\angle DLI} = \frac{\sin\beta}{\sin\angle DLI}, \quad \frac{EL}{EI} = \frac{\sin\angle EIL}{\sin\angle ELI} = \frac{\sin\gamma}{\sin\angle DLI}, \quad \text{звідки} \quad \frac{DL}{EL} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma},$$

оскільки $DI = EI$ як радіуси вписаного кола.

Далі, з урахуванням рівностей $\sin\angle AMB = \sin\angle AMC$, $AD = AE$, за теоремою синусів знаходимо

$$\frac{BM}{CM} = \frac{AB\sin x}{AC\sin y}, \quad \frac{DL}{EL} = \frac{AD\sin x}{AE\sin y} = \frac{\sin x}{\sin y}.$$

Нарешті,

$$\frac{BM}{CM} = \frac{AB}{AC}\cdot\frac{DL}{EL} = \frac{AB}{AC}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = 1,$$

що й потрібно довести.

Зауваження. Задачу неважко розв'язати за допомогою комплексних чисел[5]. Нехай вписане коло трикутника ABC задається рівнянням $z\overline{z} = 1$, точкам F, D і E відповідають комплексні числа $z_F = 1$, $z_D = d$ і $z_E = e$, причому $d\overline{d} = 1$, $e\overline{e} = 1$. Тоді, як відомо, $z_A = \frac{2de}{d+e}$, $z_B = \frac{2d}{d+1}$, $z_C = \frac{2e}{e+1}$. Для середини M сторони BC маємо $z_M = \frac{e}{e+1} + \frac{d}{d+1}$. Пряма DE має рівняння $z + de\overline{z} = d + e$. Оскільки $z_L = \overline{z_L}$, то $z_L = \frac{d+e}{1+de}$. Далі, пряма AM задається рівнянням $\frac{z-z_A}{z_M-z_A} = \frac{\overline{z}-\overline{z_A}}{\overline{z_M}-\overline{z_A}}$. Стандартними перетвореннями отримуємо $\frac{z(d+e)-2de}{d^2+e^2-2d^2e^2} = \frac{\overline{z}(d+e)-2}{d^2+e^2-2}$. Залишається перевірити, що $z = z_L$ задовольняє це рівняння.

4. *Крок 1.* Нехай $x = 0$, $y = 0$. Тоді $f(0) + f(f(0)) - f(0) = 0$, тобто $f(f(0)) = 0$.
Крок 2. Нехай $x = 1$, $y = 1$. Тоді $f(f(1)) + f(1 + f(1)) - f(1 + f(1)) = 1$, тобто $f(f(1)) = 1$.
Крок 3. Нехай $x = 1$, $y = 0$. Тоді $f(f(0)) + f(f(1)) - f(1) = 1$, тобто $f(1) = 0$.
Крок 4. Із рівності $f(1) = 0$ випливає, що $f(f(1)) = f(0)$, тобто $f(0) = 1$.
Крок 5. Нехай x — довільне, $y = 0$. Тоді

$$f(xf(0)) + f(f(x)) - f(x) = x, \quad f(x) + f(f(x)) - f(x) = x,$$

тобто $f(f(x)) = x$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.
Крок 6. Нехай $x = 1$, y — довільне. Тоді з урахуванням рівності $f(1) = 0$ одержуємо

$$f(f(y)) + f(y + f(1)) - f(1 + yf(1)) = 1, \quad f(f(y)) + f(y) = 1,$$

$$f(y) = 1 - f(f(y)), \quad f(y) = 1 - y.$$

Залишається перевірити, що функція $f(x) = 1 - x$ задовольняє умову задачі.
Відповідь: $f(x) = 1 - x$, $x \in \mathbb{R}$.

11 клас. Рівень "Б"

[5] потрібні формули, а також інші відомості щодо застосування комплексних чисел для розв'язування планіметричних задач містяться, наприклад, у посібнику З.А. Скопец, *Геометрические миниатюры,* М., Просвещение, 1990, статтях В.О. Тадеєв, *Етюд про комплексні числа та їх застосування до розв'язування планіметричних задач*, "У світі математики", № 1,2, 2002; В.А. Ясінський, *Комплексні числа в планіметричних задачах*, "Математика", №7, 2008.

3. Нехай I — центр вписаного кола трикутника ABC, K — точка дотику вписаного кола до сторони BC. Легко встановити, що кут ABC тупий.

За формулою Герона обчислюємо площу S трикутника ABC, потім за формулою $r = \frac{S}{p}$, де p — півпериметр трикутника ABC, знаходимо радіус вписаного кола: $S = 120$ см^2, $r = 3$ см. Звідси $AD = \frac{2S}{BC} = 9{,}6$ см.

За теоремою Піфагора $BD = \sqrt{16^2 - 9{,}6^2} = 12{,}8$ см. Як відомо, відрізок дотичної $BK = p - AC = 1$ см. Отже, $KM = BM - BK = 11{,}5$ см. Трикутники MKI та MDP подібні, і тому $PD = \frac{IK \cdot KM}{DM}$, $PD = 6{,}6$ см. Отже, $AP = 3$ см.
Відповідь: 3 см.

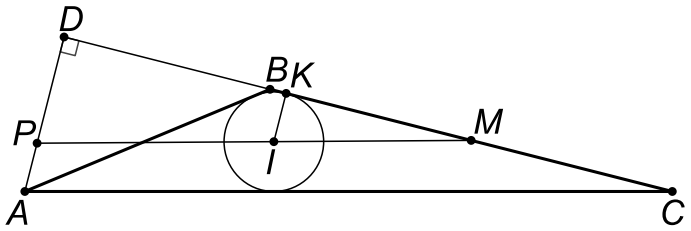

Рис. 10.

Зауваження. Можна довести загальний факт (у позначеннях розібраної задачі). Нехай ABC — довільний трикутник, у якому $AB \neq AC$. Тоді $AP = r$.

Через точку K проведемо діаметр KF вписаного кола ω трикутника ABC. Розглянемо таку гомотетію з центром A, для якої образом кола ω є зовнівписане коло ω_A трикутника ABC, яке дотикається до сторони BC. Пряма BC перейде в пряму n, паралельну BC. Нехай коло ω_A дотикається до прямих n, BC і AC в точках Q, T і N відповідно. Неважко помітити, що відрізки QT і KF будуть гомотетичними, і тому точка F лежить на прямій BT.

Далі, $AN = p$, $CT = CN$, $CN = p - AC$. Отже, $BK = CT$, точка M є серединою відрізка KT, і тому $MI \parallel AF$. Оскільки $AP \parallel FI$, то чотирикутник $APIF$ — паралелограм, і $AP = FI = r$.

5. За умовою $(x_{n+1} - \sqrt{7}x_n)^2 = 4(x_n^2 + 4)$, звідки $2x_n x_{n+1}\sqrt{7} = 3x_n^2 + x_{n+1}^2 - 16$. Тому якщо два сусідні елементи послідовності x_n та x_{n+1} одночасно є раціональними числами, то принаймні одне з них має бути нулем, бо при $x_n \neq 0$ та $x_{n+1} \neq 0$ отримаємо, що $\sqrt{7}$ є раціональним числом, а це не так.

Далі, якщо серед елементів послідовності $\{x_n,\, n \geq 1\}$ є нуль, то легко бачити, що всі наступні елементи є додатними. Тому серед чисел x_1, x_2, $\ldots$, x_{2013} є не більше одного нуля.

Розглянемо тепер 1006 пар чисел (x_1, x_2), (x_3, x_4), (x_5, x_6), $\ldots$, (x_{2011}, x_{2012}). Кожна з них містить нуль або ірраціональне число, а оскільки нуль у послідовності щонайбільше один, то ірраціональних чисел принаймні 1005 (хоча б по одному в кожній парі крім щонайбільше однієї пари).